

功能梯度材料變厚度旋轉圓盤熱彈性應力分析

Thermoelastic Stress Analysis of Functionally Graded Rotating Disks with Variable Thickness

呂學育¹

S.-Y. Leu

簡立昌²

L.-C. Chien

徐豪健³

H.-C. Hsu

¹ 中華科技大學航空機械系 助理教授

China University of Science and Technology Assistant Professor

² 中華科技大學飛機系統工程研究所 碩士班研究生

Graduate School of Aircraft System Engineering Graduate Student

³ 漢翔航空工業股份有限公司 研究助理

Aerospace Industrial Development Corp. Research Assistant

摘要

本文旨在進行功能梯度材料之熱彈性數值分析探討，藉由使用者副程式之編寫，以完成有限元素套裝軟體 ABAQUS 分析功能之加值擴充，文中亦推導承受熱負荷作用之功能梯度材料變厚度旋轉圓盤解析解，並以符號運算軟體 Mathematica 提供解析結果，作為熱彈性分析模式之比對驗證。文中數值案例考量楊氏係數、材料密度、熱膨脹係數、熱傳導係數及圓盤厚度沿徑向位置呈幕函數變化，進行旋轉圓盤熱彈性應力之影響參數探討。由分析結果顯示，相較於一般傳統均質材料，功能梯度材料旋轉圓盤有不同之熱彈性反應。此外，本文之研究成果可進一步延伸，以廣泛探討其它梯度變化模式之功能梯度材料，以及在熱傳/結構分析、振動、噪音等議題之應用。

關鍵詞：功能梯度材料、變厚度旋轉圓盤、有限元素法、熱彈性應力分析

Abstract

The paper is to establish the capability for thermoelastic analysis of FG variable-thickness rotating disks using the finite-element computer code ABAQUS by incorporating with a user subroutine. The numerical results are validated by comparing with the analytical solutions provided in the paper by using the computing software Mathematica. Parametric studies were performed to illustrate different behavior of FG rotating disks with Young's modulus, mass density, thermal expansion coefficient,

thermal conduction coefficient and thickness assumed to vary according to the power functions of radial direction. Particularly, the research results can be extended further to others issues, e.g. thermal/mechanical analysis, vibrations and acoustics with more general grading properties.

Keywords : functionally graded materials, variable-thickness rotating disks, finite-element method, thermoelastic stress analysis.

一、前 言

旋轉圓盤在工程上應用廣泛，例如高速齒輪、渦輪轉子與飛輪等。圓盤除了旋轉所造成之徹體力(body force)作用外，亦常承受嚴苛高溫環境，而功能梯度材料(Functionally Graded Materials)結合兩種或兩種以上材料性質優點，並可藉由材料組成的改變達到所需求之連續變化，可滿足旋轉圓盤在高速旋轉與高溫環境作用之要求，因而受到廣泛注意。

文獻上針對旋轉圓盤議題已有廣泛分析探討，如探討均質材料等厚度與可變厚度旋轉圓盤之應力分量解析解推導[1]。此外，文獻上亦有針對功能梯度材料旋轉圓盤之廣泛研究，其中 Durodola and Attia [2]，假設材料參數與徑向方向呈冪函數、指數型函數與多項式函數等三種變化方式，利用 ABAQUS[3, 4]有限元素軟體模擬功能梯度材料之旋轉圓盤彈性應力分佈；Cho [5]則假設楊氏係數與材料密度沿徑向方向呈冪函數變化，分析功能梯度材料中空圓盤或圓柱分別承受內壓、外壓與旋轉時的應力解析解；Zenkour [6]考慮功能梯度材料圓盤受角速度作用下，進行彈性應力分佈之解析解推導；Bayat et al. [7]考慮彈性行為之功能梯度材料，求解中空可變厚度旋轉圓盤理論正解，其中材料亦考慮與徑向呈冪函數變化。

另一方面，文獻上亦有探討旋轉圓盤承受熱負荷作用，如 Hosseini Kordkheili and Naghdabadi [8]推導半解析解，考慮功能梯度材料之中空圓盤受熱負荷作用下，探討應力、應變分量分佈；Bayat et al. [9]考慮功能梯度材料中空變厚度旋轉圓盤受熱負荷作用下，使用半解析方法求解應力分量，其中材料參數隨著徑向方向呈冪函數變化；Peng and Li [10]考慮熱負荷作用下，考慮熱膨脹係數、熱傳導係數、楊氏係數與材料密度等材料參數隨著徑向方向呈冪函數變化，進行功能梯度材料之等厚度中空旋轉圓盤應力分佈解析解推導；Afsar and Go [11]使用彈性理論之有限元素法，材料性質使用指數型函數變化方式，且考慮溫度負荷，推導功能梯度材料之等厚度中空旋轉圓盤應力分佈解析解；Nie and Batra [12]考慮圓盤受均勻溫度作用下，其中圓盤厚度、材料密度、熱膨脹係數與剪切模數均與徑向呈冪函數變化方式，分析圓盤應力分量；而 Nie and Batra [12]並推導剪切模數與熱膨脹

係數之參數調配，以求得徑向應力與周向應力線性組合為定值。

如所周知，一般商業化之套裝數值分析軟體具有多功能之優勢，可處理實際上較複雜之問題，因此常為電腦輔助設計、分析的有力工具，如泛用於航太、機械、土木及電子業等領域的有限元素分析套裝軟體 ABAQUS [3]，不僅為實務界公認可信之套裝軟體，亦常為學術界引用於研究問題之數值計算。標榜為泛用型分析軟體之 ABAQUS [3]，雖尚無內建功能梯度材料的模擬分析功能，惟使用者可藉由 ABAQUS [3]所提供之使用者副程式架構[4]，以建構功能梯度材料模式，進而擴充 ABAQUS [3]之模擬分析功能。雖然文獻上少數研究，如 Durodola and Attia [2]，已陸續利用 ABAQUS 所提供之使用者副程式架構[4]，來建構 ABAQUS [3]之功能梯度材料模擬分析功能，惟一般使用者所建立之使用者副程式並未公開。因此本研究基於 ABAQUS [3]現有的有限元素分析功能，利用其所提供使用者副程式架構[4]，進行功能之加值與擴充，建構可考慮功能梯度材料熱彈性分析功能，以進行中空旋轉圓盤受熱負荷作用下之有限元素熱彈性分析，並與本文所推導解析解進行驗證比對。

二、問題陳述

考慮功能梯度材料變厚度中空圓盤，如圖 1 所示意，其承受穩定角速度 ω 作用，而內徑為 a 、外徑為 b 。考慮內、外緣邊界條件則為無束制邊界(traction free)，及假設圓盤受穩態之溫度場作用。本文所考慮之楊氏係數、材料密度、熱膨脹係數、圓盤厚度與熱傳導係數等材料性質與圓盤幾何，則假設沿徑向呈幕函數變化，即

$$E(r) = E_0(r/b)^{m_1} \quad (1)$$

$$\rho(r) = \rho_0(r/b)^{m_2} \quad (2)$$

$$\alpha(r) = \alpha_0(r/b)^{m_3} \quad (3)$$

$$h(r) = h_0(r/b)^{m_4} \quad (4)$$

$$k(r) = k_0(r/b)^{m_5} \quad (5)$$

其中

r 為徑向方向位置

E 為楊氏係數

E_0 為外徑處之楊氏係數

ρ 為材料密度

ρ_0 為外徑處之材料密度

α 為熱膨脹係數

α_0 為外徑處之熱膨脹係數

h 為圓盤厚度

h_0 為外徑處之圓盤厚度

k 為熱傳導係數

k_0 為外徑處之熱傳導係數

m_1 為描述楊氏係數幕函數變化之幕次

m_2 為描述材料密度幕函數變化之幕次

m_3 為描述熱膨脹係數幕函數變化之幕次

m_4 為描述材料厚度幕函數變化之幕次

m_5 為描述熱傳導係數幕函數變化之幕次

三、理論背景

3.1 热彈性解析解

本文考慮中空旋轉圓盤可簡化為平面應力問題，解析推導時將圓盤材料蒲松比 ν 視為常數，且考慮幾何、材料性質與負載均為軸對稱的情況，因此應變-應力關係式經可化簡如下式

$$\varepsilon_r = \frac{\sigma_r}{E} - \nu \frac{\sigma_\theta}{E} + \alpha T \quad (6)$$

$$\varepsilon_\theta = -\nu \frac{\sigma_r}{E} + \frac{\sigma_\theta}{E} + \alpha T \quad (7)$$

其中 ε_r 、 ε_θ 分別為徑向、周向之正向應變； σ_r 、 σ_θ 分別為徑向、周向之正向應力； α 為熱膨脹係數， T 為基於參考溫度的溫度差。

考慮穩定轉速及熱負荷作用下，則功能梯度材料變厚度中空圓盤在徑向之平衡方程式為[1]：

$$\frac{d}{dr}[hr\sigma_r] - h\sigma_\theta + h\rho\omega^2 r^2 = 0 \quad (8)$$

假設一應力函數 F ，其表示型式如下

$$F = rh\sigma_r \quad (9)$$

將式(9)代入平衡方程式(8)，經整理後如下

$$\sigma_\theta = \frac{1}{h} \frac{dF}{dr} + \rho\omega^2 r^2 \quad (10)$$

將式(9)~(10)代入應變-應力關係式(6)與式(7)，可得

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} \left(\frac{F}{rh} - \frac{\nu}{h} \frac{dF}{dr} - \nu\rho\omega^2 r^2 \right) + \alpha(r)T(r) \quad (11)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} \left(\frac{1}{h} \frac{dF}{dr} + \rho\omega^2 r^2 - \frac{\nu F}{rh} \right) + \alpha(r)T(r) \quad (12)$$

基於軸對稱條件，應變-位移關係表示如下

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad (13)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (14)$$

而基於相容條件(compatibility)，可得徑向與周向應變關係式如下

$$\varepsilon_r = \frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) \quad (15)$$

將式(11)與式(12)代入式(15)中，並考慮式(1)~式(4)之材料參數變化，經由整理簡化後得到科西尤拉方程式(Cauchy-Euler equation)如下所示

$$r^2 \frac{d^2 F}{dr^2} + r(1 - m_1 - m_4) \frac{dF}{dr} + (vm_1 + vm_4 - 1)F = \\ (m_1 - m_2 - v - 3) \frac{h_0 \rho_0 \omega^2}{b^{m_2+m_4}} r^{m_2+m_4+3} - \frac{E_0 h_0 \alpha_0}{b^{m_1+m_3+m_4}} \left(r^{m_1+m_3+m_4+2} \frac{dT}{dr} + m_3 r^{m_1+m_3+m_4+1} T \right) \quad (16)$$

3.2 溫度場分佈

在求解式(16)之科西尤拉微分方程前，須先求得溫度場之分佈。考慮穩態無熱源之熱傳導的平衡方程式

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[rh(r)k(r) \frac{dT(r)}{dr} \right] = 0 \quad (17)$$

當考慮式(4)~(5)的圓盤厚度與熱傳導係數沿徑向呈幕函數變化，則式(17)熱傳導的平衡方程式可化簡如下

$$r^2 \frac{d^2 T(r)}{dr^2} + r(1 + m_4 + m_5) \frac{dT(r)}{dr} = 0 \quad (18)$$

當考慮 $m_4 + m_5 = 0$ ，則求解式(18)可得溫度場之非線性分佈關係如下

$$T(r) = \frac{(T_b - T_a) \ln r + T_a \ln b - T_b \ln a}{\ln b - \ln a} \quad (19)$$

其中 T_a 為中空圓盤內徑處溫度， T_b 為中空圓盤外徑處溫度。

當考慮 $m_4 + m_5 \neq 0$ ，代入式(18)可得溫度場之分佈關係如下

$$T(r) = \frac{(T_b - T_a) r^{-m_4-m_5} + T_a b^{-m_4-m_5} - T_b a^{-m_4-m_5}}{b^{-m_4-m_5} - a^{-m_4-m_5}} \quad (20)$$

值得注意的是，我們可利用符號運算軟體 Mathematica [13]求解式(16)之科西尤拉微分方程式的解析解，以計算徑向應力，而周向應力關係可經由式(10)求得。

四、數值分析模式建立

本文進行功能梯度材料結構之熱彈性應力分析，基於 ABAQUS [3]之有限元素彈性分析架構，並應用 ABAQUS [3]內部提供之使用者副程式架構[4]，編寫使用者材料之參數模式，以加值擴充材料模擬之功能。假設楊氏係數、材料密度、熱膨脹係數、圓盤厚度與熱傳導係數沿徑向位置呈幕函數變化如式(1)~式(5)之關係式。

本文所考量中空圓盤之幾何及材料性質為軸對稱，而承受熱負荷與旋轉作用亦為軸對稱，因此可將問題簡化為如圖 2 所示之 5° 分析模式，其中對稱條件施加於兩側邊界，並假設圓盤之外徑處厚度值 $h_0 = 0.01\text{ m}$ 。

分析時首先計算溫度場，使用熱傳元素(DS8)計算溫度分佈後，再將結果以節點溫度方式輸入於旋轉圓盤之應力分析模式，而應力分析則使用可變厚度之非線性殼元素(S8R)，並定義圓盤厚度及材料參數與徑向位置變化之關係。

五、分析結果與討論

考慮中空圓盤內、外徑分別為 $a = 0.2\text{m}$ 與 $b = 1\text{m}$ ，中空圓盤材料性質 E_0 為 151GPa 、 ρ_0 為 5700 kg/m^3 、 α_0 為 $10 \times 10^{-6}/\text{C}$ 與 k_0 為 $2\text{W/m}^\circ\text{C}$ 。至於圓盤材料蒲松比 ν ，則考慮為常數 0.3 。

首先，探討內、外緣溫度差對於功能梯度材料之中空旋轉圓盤應力分佈影響，其內緣處溫度 T_a 分別假設為 0°C 、 50°C 、 100°C 與 150°C ，而外緣處溫度 T_b 皆固定考慮為 100°C ，而圓盤旋轉角速度 $\omega = 1\text{ rad/sec}$ 。分析時，假設式(1)~式(5)之楊氏係數、材料密度、熱膨脹係數、圓盤厚度與熱傳導係數均沿徑向呈幕函數變化，其梯度變化之參數為 $m_1 = m_2 = m_3 = m_5 = -1$ ， $m_4 = 0$ 。由圖 3 徑向應力分佈圖顯示，由 ABAQUS [3]所計算之數值結果與本論文所推導之解析解相當吻合。對應於不同內緣溫度之情況，其徑向應力最大值均發生於靠近內緣處。由圖 3 顯示，在 $m_1 = m_2 = m_3 = m_5 = -1$ ， $m_4 = 0$ 時，當內緣溫度為 0°C 時，徑向應力為張應力，惟當內緣溫度增加為 50°C 、 100°C 與 150°C 時，徑向應力則轉為壓應力。另一方面，由圖 4 之周向應力圖所示，於內緣溫度為 0°C 時，由內緣處較大之張應力逐漸遞減至 r/b 約為 0.3 處無應力狀態，之後轉為壓應力並逐漸往外緣處平滑變化。當內緣受溫度 50°C 、 100°C 與 150°C 時，由內緣處之壓應力逐漸遞減至 r/b 約為 0.3 處無應力狀態，之後轉為張應力並逐漸往外緣處平滑變化。值得注意的是，本文參照文獻上[10]應力無因次化方式，將徑向、周向應力分量分別表示成 $\sigma_r(1-\nu)/[E_0\alpha_0T_0 + (1-\nu_0)\rho_0\omega_0^2b^2]$ 、 $\sigma_\theta(1-\nu)/[E_0\alpha_0T_0 + (1-\nu_0)\rho_0\omega_0^2b^2]$ ，其中 $\nu = 0.3$ ， $E_0 = 151\text{GPa}$ ， $\alpha_0 = 10 \times 10^{-6}/\text{C}$ ， $T_0 = 100^\circ\text{C}$ ， $\rho_0 = 5700\text{kg/m}^3$ ， $\omega_0 = 1\text{ rad/sec}$ ，而本文後續分析案例之應力分量亦以相同無因次化型式呈現。

其次，探討材料性質梯度變化對中空旋轉圓盤之應力分佈的影響，

假設式(1)~式(3)楊氏係數、材料密度、熱膨脹係數與式(5)熱傳導係數沿徑向呈幕函數變化之幕次 $m_1 = m_2 = m_3 = m_5 = -1, 0, 1$ 。分析時，考慮等厚度之中空旋轉圓盤，亦即式(4) $m_4 = 0$ ；另一方面，圓盤內緣處溫度 T_a 假設為 0°C ，而外緣處溫度 T_b 考慮為 100°C ；設定圓盤旋轉角速度為 $\omega = 1 \text{ rad/sec}$ 。此外，對應於 $m_5 = -1, 0, 1$ 之溫度場分佈分別為式(19)~(20)所示，三種溫度場分佈如圖5所示。由圖6之徑向應力分佈圖顯示，由ABAQUS [3]所計算之數值結果與本論文所推導之解析解相當吻合。由圖6亦可知，當材料性質梯度變化之幕函數幕次為 $m_1 = m_2 = m_3 = m_5 = 1$ 時大致上可獲得較低之徑向應力；而在材料性質梯度變化之幕函數幕次為 $m_1 = m_2 = m_3 = m_5 = -1$ 時徑向應力大致上較大。另一方面，由圖7之周向應力分佈圖顯示，由ABAQUS [3]所計算之數值結果與本論文所推導之解析解相當吻合。由圖7亦可知，在內緣處附近，當材料性質梯度變化之幕函數幕次為 $m_1 = m_2 = m_3 = m_5 = 1$ 時大致上可獲得較低之周向張應力，而在材料性質梯度變化之幕函數幕次為 $m_1 = m_2 = m_3 = m_5 = -1$ 時周向張應力大致上較大。在中間區域，則當材料性質梯度變化之幕函數幕次為 $m_1 = m_2 = m_3 = m_5 = 1$ 時大致上可獲得較低之周向壓應力，而在材料性質梯度變化之幕函數幕次為 $m_1 = m_2 = m_3 = m_5 = -1$ 時周向壓應力大致上較大。

接著，探討圓盤厚度變化對應力分佈之影響，其中厚度變化之幕函數幕次分別考慮為 $m_4 = -1, 0, 1$ ，圖8即為圓盤厚度變化示意。楊氏係數、材料密度、熱膨脹係數與熱傳導係數假設為沿徑向呈幕函數變化，考慮幕函數幕次分別為 $m_1 = m_2 = m_3 = m_5 = -1, 0, 1$ ，而圓盤旋轉角速度 $\omega = 1 \text{ rad/sec}$ 。圓盤內緣處溫度為 0°C ，外緣處溫度則為 100°C 。由圖9~14顯示，考慮厚度變化影響效應時，由ABAQUS [3]所計算之徑向及周向應力數值結果與本論文所推導之解析解相當吻合。由圖9~12可知，當考慮 $m_1 = m_2 = m_3 = m_5 = -1, 0$ 時，相較於 $m_4 = 0, 1$ ，可知在圓盤近內側區域 $m_4 = -1$ 大致上可獲得最低之徑向張應力或較大之周向壓應力。惟當考慮 $m_1 = m_2 = m_3 = m_5 = 1$ 時，由圖13~14顯示，在圓盤近內側區域 $m_4 = -1$ 大致上可獲得最低之徑向張應力及周向張應力，惟在圓盤近外側區域 $m_4 = -1$ 大致上獲得較大之徑向張應力及周向壓應力。

六、結論

本文藉由有限元素分析軟體 ABAQUS 所提供之使用者副程式架構，進行使用者材料之編寫與模擬，完成功能梯度材料之數值分析功能建立。同時，文中亦針對功能梯度材料之變厚度中空旋轉圓盤，推導出熱彈性之解析解。

由以上分析案例顯示，由ABAQUS [3]所計算之數值結果與本論文所推導之解析解相當吻合，顯示所建構之功能梯度材料之變厚度中空旋轉圓盤熱彈性分析模式之正確性。

文中亦針對功能梯度材料之中空旋轉圓盤應力分佈進行完整之參數探討，如內、外緣溫度差、材料性質之梯度變化、圓盤厚度變化及材料蒲松比變化等，顯

示相較於一般傳統均質材料，功能梯度材料旋轉圓盤有不同之熱彈性反應。惟功能梯度材料仍須透過最佳化之設計，方能有優於均質材料之性能。

本文考慮楊氏係數、材料密度、熱膨脹係數、圓盤厚度與熱傳導係數假設為沿徑向呈幕函數變化，因此得以求得解析解，作為驗證所建構之功能梯度材料變厚度旋轉圓盤分析模式之正確性。無疑地，本文之研究成果可進一步延伸，以探討其它函數型式之梯度變化模式的功能梯度材料，以及在熱傳/結構分析、振動、噪音等議題之應用。

致謝

本文研究內容執行期間，承蒙國科會計畫(編號: NSC 98-2221-E-157-003)之經費補助，在此特別致上謝意。另外，本文部分結果曾發表於中華民國航太學會學術研討會(2010)。

參考文獻

- [1] Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill Book Company, 1970.
- [2] Durodola, F. G. and Attia, O., Deformation and Stresses in Functionally Graded Rotating Disks, *Composites Science and Technology*, Vol. 60, pp 987-995, 2000.
- [3] ABAQUS, ABAQUS/Standard V6.9 User's Manual, Dassault Systèmes Simulia Corp., RI; 2009.
- [4] ABAQUS, Writing User Subroutines with ABAQUS, Hibbit, Karlsson and Sorensen, Inc., RI, 1998.
- [5] Cho, C. Y., Exact Solutions for Stresses in Double-layered Functionally Graded Hollow Disk or Cylinders, *Master Thesis*, Department of Mechanical Engineering, National Cheng Kung University, 2008.
- [6] Zenkour, A. M., Stress Distribution in Rotating Composite Structures of Functionally Graded Solid Disks, *Journal of Materials Processing Technology*, Vol. 209, pp 3511-3517, 2009.
- [7] Bayat, M., Saleem, M., Sahari, B. B., Hamouda, A. M. and Mahdi, E., Analysis of Functionally Graded Rotating Disks with Variable Thickness, *Mechanics Research Communications*, Vol. 35, pp 283-309, 2008.
- [8] Hosseini Kordkheili, S. A. and Naghdabadi, R., Thermoelastic Analysis of a

Functionally Graded Rotating Disk, Composite Structures, Vol. 79, pp 508-516, 2007.

- [9] Bayat, M., Saleem, M., Sahari, B. B., Hamouda, A. M. S. and Mahdi, E., Mechanical and Thermal Stresses in a Functionally Graded Rotating Disk with Variable Thickness due to Radially Symmetry Loads, International Journal of Pressure Vessels and Piping, Vol. 86, pp 357-372, 2009.
- [10] Peng, X. L. and Li, X. F., Thermal Stress in Rotating Functionally Graded Hollow Circular Disks, Composite Structures, Vol. 92, pp 1896-1904, 2010.
- [11] Afsar, A. M. and Go, J., Finite Element Analysis of Thermoelastic Field in a Rotating FGM Circular Disk, Applied Mathematical Modelling, Vol. 34, pp 3309-3320, 2010.
- [12] Nie, G. J. and Batra, R. C., Stress Analysis and Material Tailoring in Isotropic Linear Thermoelastic Incompressible Functionally Graded Rotating Disks of Variable Thickness, Composite Structures, Vol. 92, pp 720-729, 2010.
- [13] S. Wolfram, The Mathematica Book (fourth ed.), Cambridge University Press, 1999.

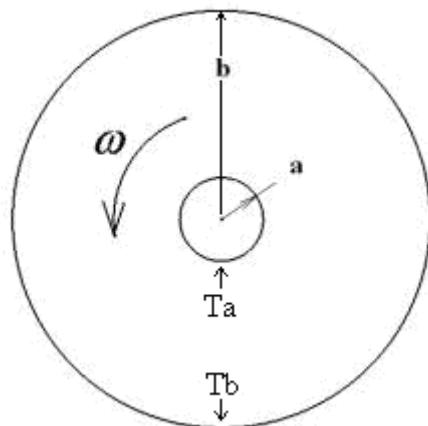


圖 1 热彈性分析之中空旋轉圓盤示意

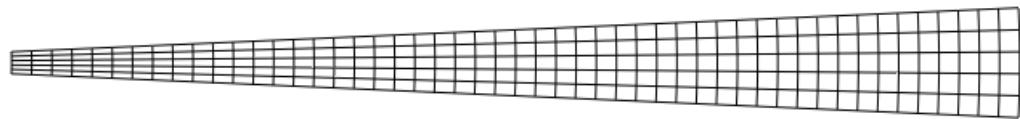


圖 2 圓盤有限元素熱彈性分析網格示意圖(5°)

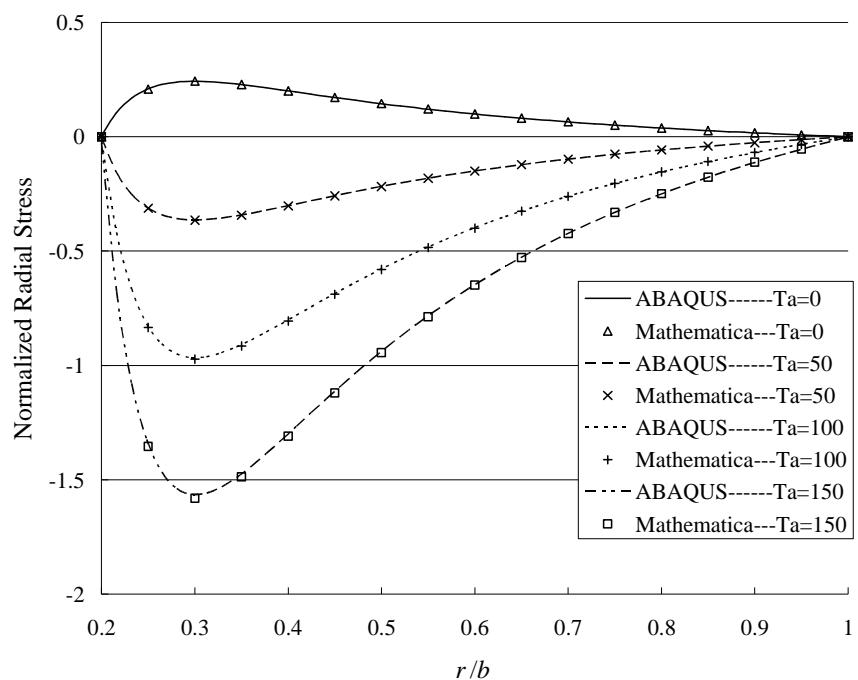


圖 3 不同內緣溫度之徑向應力分佈

$$(m_1 = m_2 = m_3 = m_5 = -1, m_4 = 0)$$

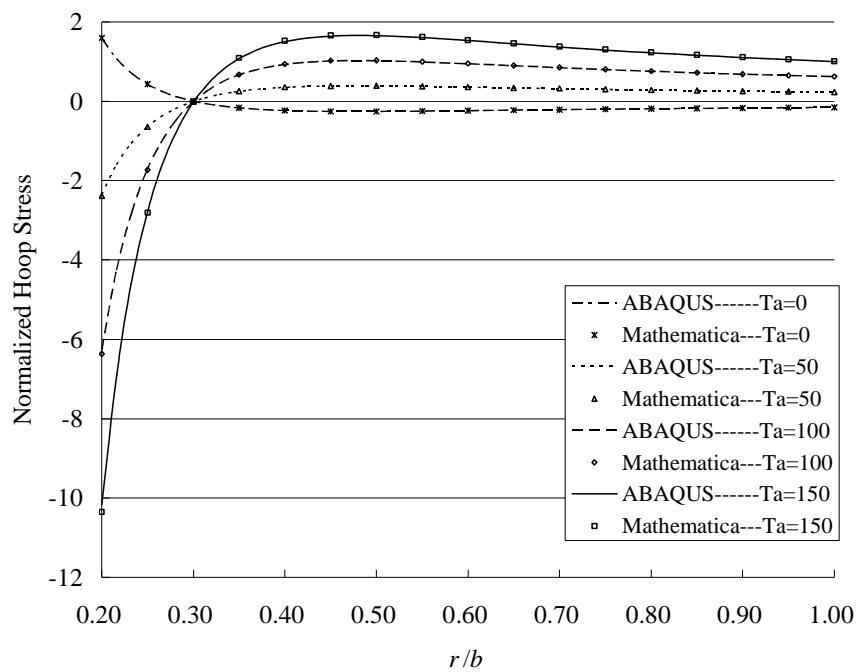


圖 4 不同內緣溫度之周向應力分佈
($m_1 = m_2 = m_3 = m_5 = -1$, $m_4 = 0$)

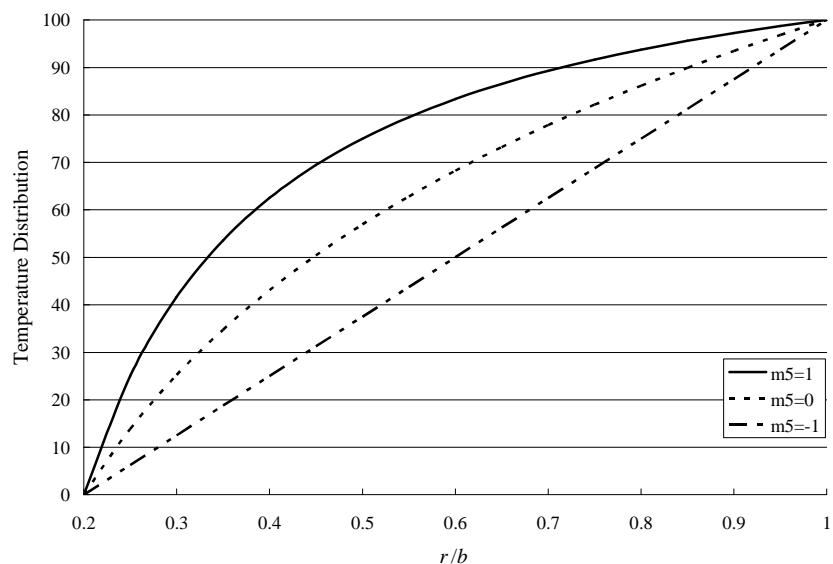


圖 5 不同溫度場分佈示意圖

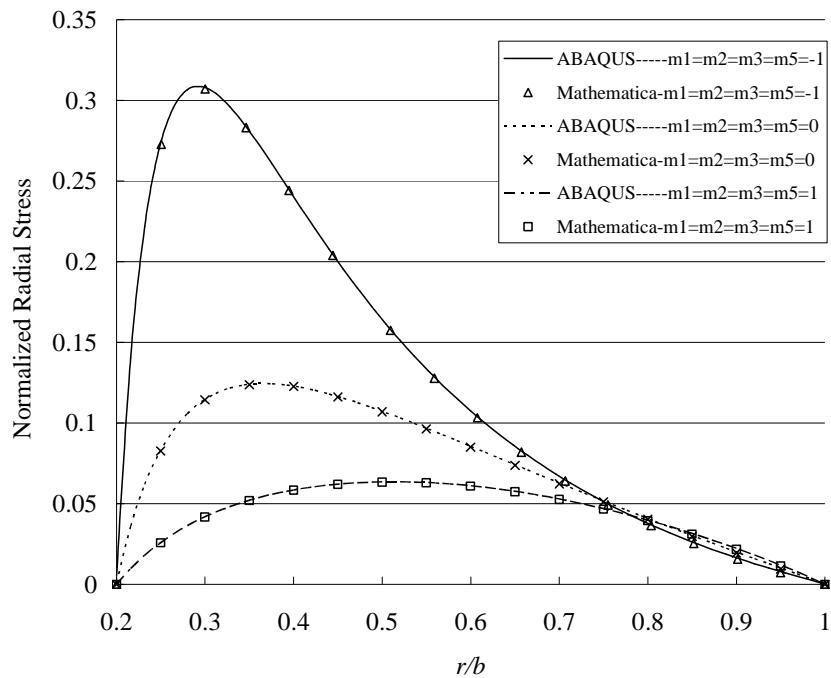


圖 6 不同材料性質梯度變化模式徑向應力分佈($m_4 = 0$)

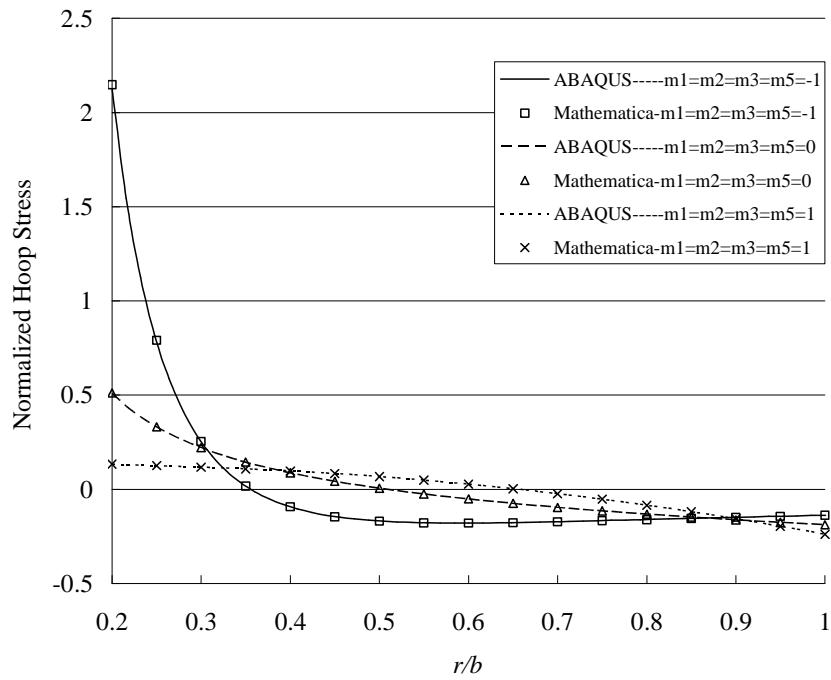


圖 7 不同材料性質梯度變化模式周向應力分佈($m_4 = 0$)

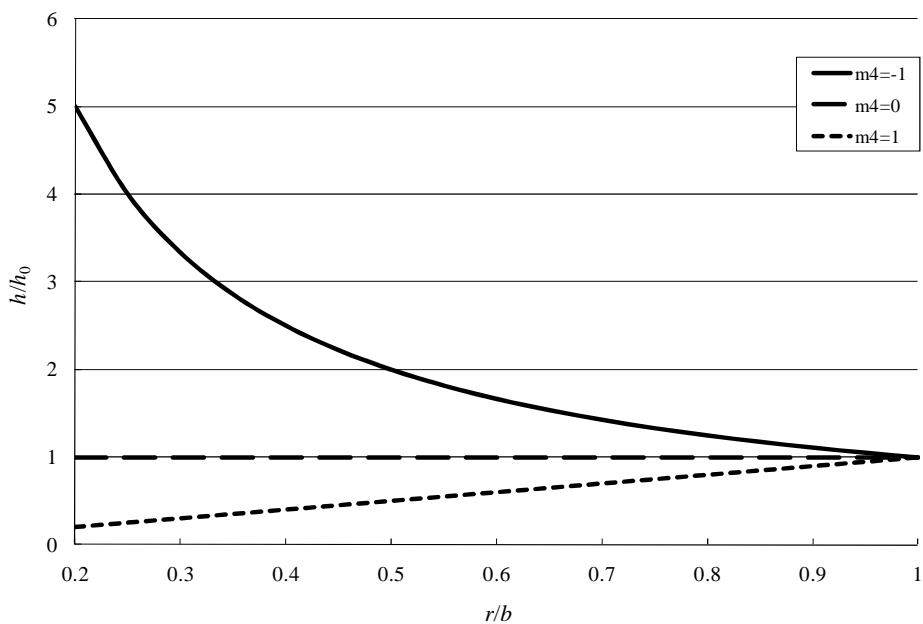


圖 8 不同圓盤厚度變化模式示意

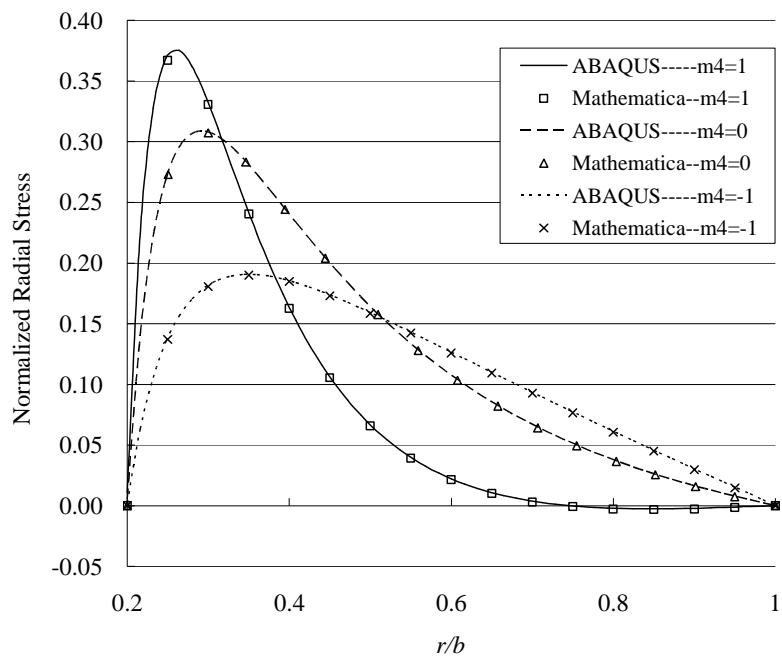


圖 9 不同厚度變化模式之徑向應力分佈(一)
($m_1=m_2=m_3=m_5=-1$)

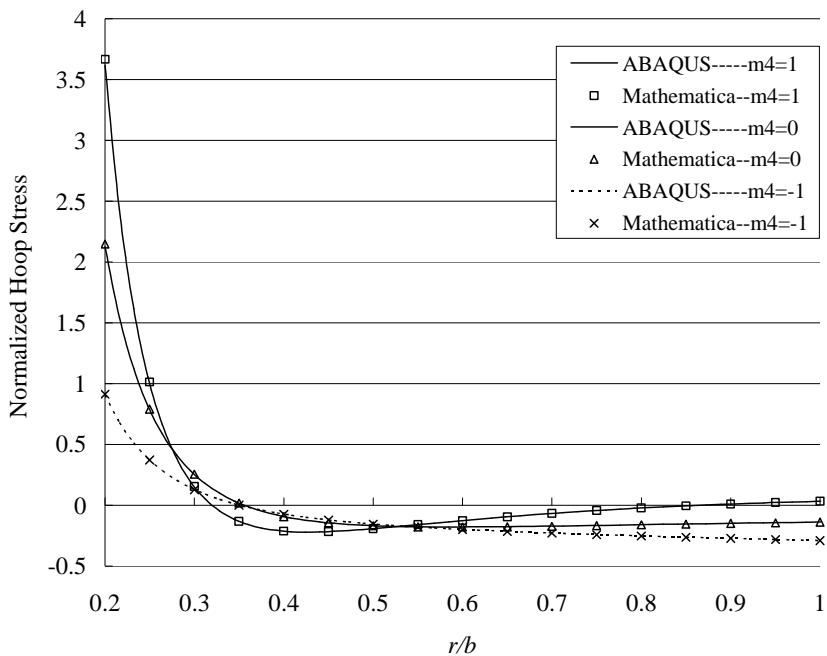


圖 10 不同厚度變化模式之周向應力分佈(一)
($m_1=m_2=m_3=m_5=-1$)

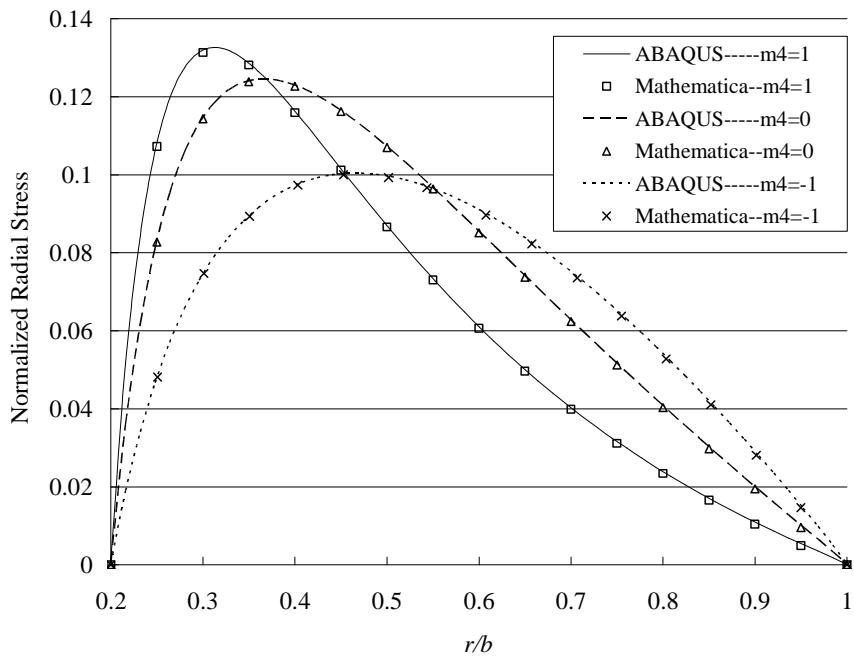


圖 11 不同厚度變化模式之徑向應力分佈(二)
($m_1=m_2=m_3=m_5=0$)

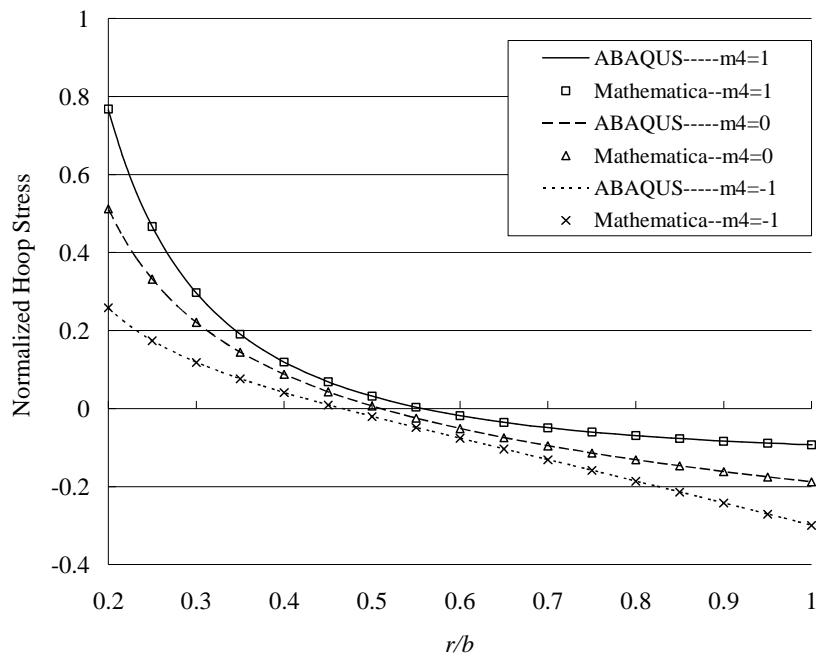


圖 12 不同厚度變化模式之徑向應力分佈(二)
($m_1=m_2=m_3=m_5=0$)

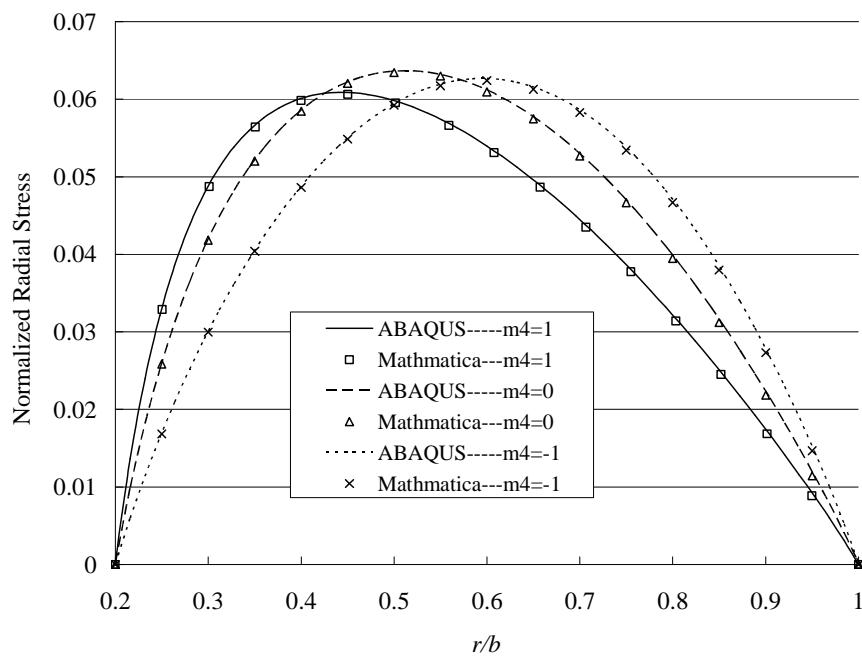


圖 13 不同厚度變化模式之徑向應力分佈(三)
($m_1=m_2=m_3=m_5=1$)

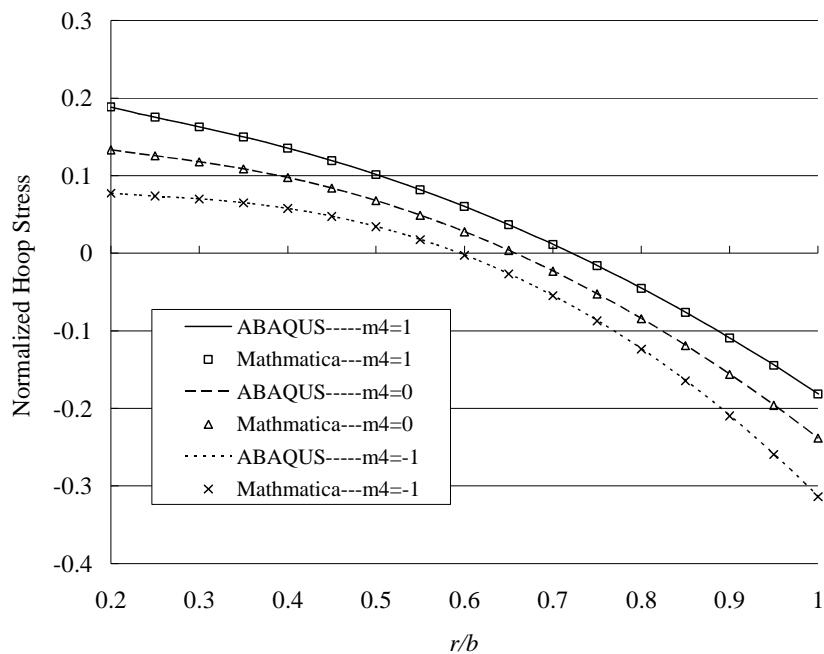


圖 14 不同厚度變化模式之周向應力分佈(三)
($m_1=m_2=m_3=m_5=1$)