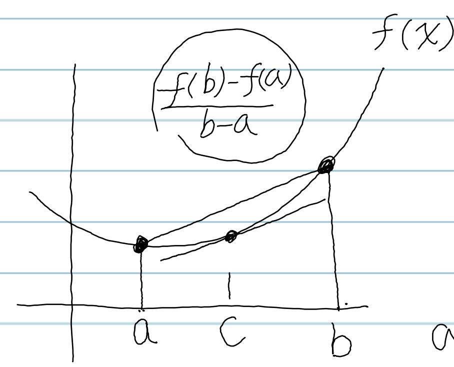
均值定理

利用均值定理證明：當 $x>0$ 時

$$\frac{x}{1+x} < \ln(x+1) < x$$

考慮 $f(t)=\ln(t)$

$[1, x+1]$



$a<b$

$$\frac{f(x+1)-f(1)}{x} = f'(c)$$

$a<c<b$

使

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

$$\boxed{f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)}$$

$$\frac{\ln(x+1)-0}{x} = \frac{1}{c}$$

$$\boxed{\ln(x+1) = \frac{x}{c}}$$

$$1 < c < x+1$$

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{c} < \frac{1}{1}$$

$$\frac{x}{x+1} < \frac{x}{c} < 1$$

$$\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$$