第一週	主題一**:**數
	主題二：函數
	主題三：一元二次方程式
	主題四：直線方程式
第二週	主題五：極限
第三週	主題六：連續性
第四週	主題七：漸近線
第五週	主題八：導函數
第六週	主題九：指數與對數
第七週	主題十：指數與對數的微分
第八週	主題十一：微分技巧延伸
第九週	主題十二：三角函數**(**一**)**
第十週	主題十三：三角函數**(**二**)**
第十一週	主題十四：三角函數的微分
第十二週	主題十五：相對極大與極小
第十三週	主題十六：絕對極值
第十四週	主題十七：近似值
第十五週	主題十八：相關變律
第十六週	主題十九 **：** 羅必達法則
第十七週	主題二十：不定積分
第十八週	主題二十一：不定積分的其他技巧

<table>
<tr><td colspan="3">第十八週 不定積分的其他技巧</td></tr>
<tr><td rowspan="4">主題二十一：不定積分的其他技巧</td><td colspan="2">PART 1：分部積分法</td></tr>
<tr><td>O06</td><td>

分部積分法公式:設 u 與 v 均為變數

$$\int udv = uv - \int vdu$$

解釋:依據乘法的微分公式

$$d(u\cdot v) = vdu + udv$$

$$\int d(u\cdot v) = \int vdu + \int udv$$

$$u\cdot v = \int vdu + \int udv$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

本公式非常重要，許多積分非要使用這個方法才能計算，許多複雜的題型經常需要搭配分部積分與變數變換才能解出，而且在未來延伸學習如拉普拉斯變換(Laplace Transformation)也需要使用本分部積分技巧。

</td></tr>
<tr><td></td><td>

例題:(分部積分標準作法)

求不定積分

$$\int x\cos x\,dx$$

SOL:為了要套用分部積分法公式，要先假設 $u=?$ ， $dv=?$

設 $u=x$ ， dv 就沒有其他選擇，剩下部份稱為 $dv=\cos dx$

$$\begin{tikzcd} u=x \arrow[r, "剩下"] \arrow[d, "微分"] \arrow[dr] & dv=\cos x\,dx \arrow[d, "積分"] \\ du=dx & v=\sin x \arrow[l] \end{tikzcd}$$

圖 1.分部積分過程

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C$$

</td></tr>
<tr><td></td><td>

例題:(分部積分較快作法)

要想快速解題必須熟練微分式:

$de^x = e^x dx$ ， $d\sin x = \cos xdx$ ， $d\cos x = -\sin xdx$ ，

$d(x^2 + C) = 2xdx$ 等

求不定積分

$$\int x\cos x\,dx$$

SOL:

(1) $\cos x\,dx$ 合併成 $d\sin x$

$$\int x[\cos x\,dx] = \int [x]\,d[\sin x]$$

(2)套用 $\int udv = uv - \int vdu$

$$\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C$$

</td></tr>
</table>

PART 2：約化公式題型

雖然下列題型屬於三角函數積分範圍，但解題技巧是分部積分法

目的:求 $\int \sin^n x\,dx$ 之不定積分

$$\int \sin^n x\,dx = \int \sin^{n-1}\sin x\,dx = \int \sin^{n-1}x\sin x\,dx = \int \sin^{n-1}x\,d(-\cos x)$$

$$= -\cos x\sin^{n-1}x - \int (-\cos x)\,d\sin^{n-1}x$$

$$= -\cos x\sin^{n-1}x + (n-1)\int (-\cos x)\cdot\sin^{n-2}x\cdot\cos x\,dx$$

$$= -\cos x\sin^{n-1}x + (n-1)\int (\cos^2 x)\cdot\sin^{n-2}x\cdot dx$$

$$= -\cos x\sin^{n-1}x + (n-1)\int (1-\sin^2 x)\cdot\sin^{n-2}x\cdot dx$$

$$= -\cos x\sin^{n-1}x + (n-1)\left[\int (\sin^{n-2}x - \sin^n x)dx\right]$$

$$= -\cos x\sin^{n-1}x + (n-1)\int \sin^{n-2}x\,dx - (n-1)\int \sin^n x\,dx$$

$$n\int \sin^n x\,dx = -\cos x\sin^{n-1}x + (n-1)\int \sin^{n-2}x\,dx$$

$$\int \sin^n x\,dx = -\frac{1}{n}\cos x\sin^{n-1}x + \frac{(n-1)}{n}\int \sin^{n-2}x\,dx$$

這就是約化公式，由 $\int \sin^n x\,dx$ 降至 $\int \sin^{n-2}x\,dx$ ，每使用一次公式降兩次，我們可以反覆使用，將高次降至 0 次或 1 次來求不定積分。

例題: (約化公式)

$$n=2,\ \int \sin^2 x\,dx = -\frac{1}{2}\cos x\sin x + \frac{1}{2}\int dx = -\frac{1}{2}\cos x\sin x + \frac{x}{2} + C$$

$$n=3,\ \int \sin^3 x\,dx = -\frac{1}{3}\cos x\sin^2 x + \frac{2}{3}\int \sin x\,dx = -\frac{1}{3}\cos x\sin^2 x - \frac{2}{3}\cos x + C$$

$n=5,\ \int \sin^5 x\,dx = -\frac{1}{5}\cos x\sin^4 x + \frac{4}{5}\int \sin^3 x\,dx$ ，再將 $\int \sin^3 x\,dx$ 的結果代入

PART 3： $\int \sin^n x\,dx$ 積分(n 為奇數)

O09	當 n 為奇數時，以約化公式反覆疊代，每疊代一次降 2 次方，直到算出答案為止。

PART 4：PART 3： $\int \sin^n x\,dx$ 積分(n 為偶數)

O10	當 n 為偶數時，可使用約化公式反覆疊代，每疊代一次降 2 次方，直到降到 0 次，也可以降到 2 次時利用平方化倍角公式 $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ ， $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ 求積分

PART 5： $\int \sin Ax\cos Bx\,dx$ 積分

O11	這類題型只要熟練積化和差公式便可容易解出 $\sin Ax\cos Bx = \frac{1}{2}[\sin(A+B)x + \sin(A-B)x]$ $\cos Ax\cos Bx = \frac{1}{2}[\cos(A+B)x + \cos(A-B)x]$

		$\sin Ax\sin Bx=\frac{1}{2}\left[\cos(A-B)x-\cos(A+B)x\right]$
	例題:(積化和差)求不定積分 $\int \sin 5x\cos 3x\,dx$ SOL:(利用積化和差拆開) $\int \sin 5x\cos 3x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 8x+\sin 2x)\,dx=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{8}\cos 8x-\frac{1}{2}\cos 2x\right]+C$	
	PART 6： $\int \sec x\,dx$ 的積分	
	O12	$\int \sec x\,dx=\ln(\sec x+\tan x)+C$ 這個結果需要記住，解題過程也頗有技巧，同學可欣賞解題技巧。
	PART 7： $\int \sec^3 x\,dx$ 的積分	
	O13	$\int \sec^3 x\,dx$ 這個問題結合分部積分、三角函數的恆等式、疊合法的技巧，能提升學習者綜合能力和演算能力，是非常值得學習的問題。
	PART 8： 疊合法	
	有些積分無法直接計算出答案，疊合法是經過運算後發現算式中出現原來欲計算的積分，透過移項以求方程式的方法求出積分，以下例題是經典的疊合例題	
	例題:(疊合法)求不定積分 $\int e^x\cos x dx$ SOL: 設 $\int e^x\cos x dx=I$ $I=\int e^x d\sin x=e^x\sin x-\int \sin x de^x=e^x\sin x-\int \sin x e^x dx=e^x\sin x+\int e^x d\cos x$ $=e^x\sin x+e^x\cos x-\int \cos x e^x dx=e^x\sin x+e^x\cos x-I$ $\Rightarrow\quad 2I=e^x\sin x+e^x\cos x$ ， $\Rightarrow\quad I=\frac{1}{2}\left(e^x\sin x+e^x\cos x\right)+C$	
	PART 8： $\int \sec^n x\tan^m x\,dx$ 型的積分(n 為偶數)	
	n 為偶數時，我們的策略 (1) $\sec^n x$ 取出 2 次與 dx 合併，也就是 $\sec^n x dx=\sec^{n-2}x\cdot\left(\sec^2 x dx\right)=\sec^{n-2}x d\tan x$ (2)利用恆等式 $\sec^2 x=\tan^2 x+1$ 將原式改為 $\tan x$ 表示	
	例題:($\sec^n x\tan^m x$ 型)求不定積分 $\int \sec^4 x\tan^5 x\,dx$ SOL: (1)由 $\sec^4 x$ 中取出 2 次 $\int \sec^4 x\tan^5 x\,dx=\int \sec^2 x\tan^5 x\,d\tan x$	

(2)將$\sec^2 x$改為$\tan^2 x$表示

$$\int \sec^2 x \tan^5 x \, d\tan x = \int (\tan^2 x + 1)\tan^5 x \, d\tan x = \int (\tan^7 x + \tan^5 x) \, d\tan x$$

$$= \frac{1}{8}\tan^8 x + \frac{1}{6}\tan^6 x + C$$

PART 8：$\int \sec^n x \tan^m x \, dx$ 型的積分(m 為奇數)

m 為奇數時，我們的策略

(1)$\sec^n x$與$\tan^m x$各取出 1 次與dx合併，

也就是$\sec^n x \tan^m x dx = \sec^{n-1} x \tan^{m-1} x (\sec x \tan x dx) = \sec^{n-1} x \tan^{m-1} x d \sec x$

(2)利用恆等式$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$將原式改為$\sec x$表示

例題:($\sec^n x \tan^m x$ 型)求不定積分

$$\int \sec^7 x \tan^3 x \, dx$$

SOL:

(1)由$\sec^7 x$與$\tan^3 x$中各取出 1 次

$$\int \sec^7 x \tan^3 x \, dx = \int \sec^6 x \tan^2 x \, d\sec x$$

(2)將$\tan^2 x$改為$\sec^2 x$表示

$$\int \sec^6 x \tan^2 x \, d\sec x = \int \sec^6 x(\sec^2 x - 1) d\sec x = \int (\sec^8 x - \sec^6 x) d\sec x$$

$$= \frac{1}{9}\sec^9 x - \frac{1}{7}\sec^7 x + C$$

PART 8：三角代換法

O14

當積分函數為下列根式型態時，我們的變數變換策略

(1) $\sqrt{a^2 - x^2}$ 時，令 $x = a\sin\theta$ 以去掉根號

(2) $\sqrt{a^2 + x^2}$ 時，令 $x = a\tan\theta$ 以去掉根號

(3) $\sqrt{x^2 - a^2}$ 時，令 $x = a\sec\theta$ 以去掉根號

例題:(三角代換)求不定積分

$$\int \sqrt{16 - x^2} dx$$

SOL:

(1) 變數假設就緒

令 $x = 4\sin\theta$ ， $dx = 4\cos\theta d\theta$

(2)將x改為θ

$$\int \sqrt{16 - x^2} dx = \int \sqrt{16 - 4^2 \sin^2\theta} 4\cos\theta d\theta = 4\int \cos\theta 4\cos\theta d\theta = 16\int \cos^2\theta d\theta$$

(3)平方化倍角

$$16\int \cos^2\theta d\theta = \frac{16}{2}\int (1 + \cos 2\theta) d\theta = 8(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta) + C = 8\theta + 4\sin 2\theta + C$$

(4) 將θ還原為x，其中還使用了倍角公式$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$8\theta + 4\sin 2\theta + C = 8\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + 8\sin\theta\cos\theta + C = 8\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + 8\left(\frac{x}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{16 - x^2}}{4}\right) + C$$

$$= 8\sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x\sqrt{16 - x^2}}{2} + C$$

註: $x = 4\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{x}{4} \quad \Rightarrow \quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)$ ， $\cos\theta = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{4}$

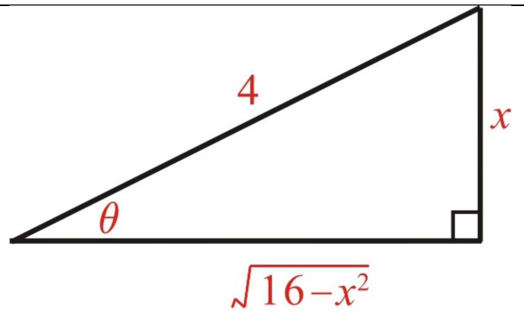

圖 2. x與θ之關係圖

PART 9：部分分式積分法(分母 2 次可分解)

O07

不定積分型式$\int \frac{dx+e}{ax^2+bx+c}dx$，若$ax^2+bx+c$可分解為兩個一次式相乘$(b^2-4ac>0)$，可用快速分解法分成兩個簡單積分求解

例題:(快速分解)求不定積分

$$\int \frac{2x+1}{x^2-x-6}dx$$

SOL:

$$\int \frac{2x+1}{x^2-x-6}dx=\int \frac{2x+1}{(x-3)(x+2)}dx=\int \frac{\frac{7}{5}}{(x-3)}+\frac{\frac{3}{5}}{(x+2)}dx$$

$$=\frac{7}{5}\ln(x-3)+\frac{3}{5}\ln(x+2)+C$$

PART 10：部分分式積分法(分母 2 次不可分解)

不定積分型式$\int \frac{dx+e}{ax^2+bx+c}dx$，若$ax^2+bx+c$無法分解為兩個一次式相乘$(b^2-4ac<0)$，只能使用配方法拆開，這種題型要注意會出現

(1) $\int \frac{2x}{1+x^2}dx=\ln(1+x^2)+C$

(2) $\int \frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+C$ 相關算式

例題:(配方)求不定積分

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+2}dx$$

SOL:(分母不能分解)

(1)分母配方

$$\int \frac{3x+5}{x^2+2x+2}dx=\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+1)+1}dx=\int \frac{3x+5}{(x+1)^2+1}dx$$

(2)變數變換

令$u=x+1$，$du=dx$

原式$=\int \frac{3u+2}{u^2+1}du=\int \frac{3u}{u^2+1}du+\int \frac{2}{u^2+1}du=\frac{3}{2}\ln(u^2+1)+2\tan^{-1}u+C$

(3)還原為x

原式$=\frac{3}{2}\ln(u^2+1)+2\tan^{-1}u+C=\frac{3}{2}\ln(x^2+2x+2)+2\tan^{-1}(x+1)+C$

PART 10：部分分式積分法二(綜合除法)

O08

$\int \frac{b_1x^k+b_2x^{k-1}+\cdots+b_k}{(x-a)^n}dx$型的不定積分，$k,n$為正整數

直接以還就分母原則，令$u=x-a$，分子以綜合除法改以u表示

例題:(綜合除法)求不定積分

$$\int \frac{3x^3-4x^2+5}{(x-2)^5}dx$$

SOL:

(1)以綜合除法將分子的 x 改成 $(x-2)$ 表示

$$\begin{array}{cccc|c}
3 & -4 & 0 & 5 & 2 \\
 & 6 & 4 & 8 & \\
\hline
3 & 2 & 4 & 13 & \\
 & 6 & 16 & & \\
\hline
3 & 8 & 20 & & \\
 & 6 & & & \\
\hline
3 & 14 & & &
\end{array}$$

圖 3. 綜合除法

$$3x^3-4x^2+5=3(x-2)^3+14(x-2)^2+20(x-2)+13$$

(2)拆開原式積分成為 4 項

$$\int \frac{3x^3-4x^2+5}{(x-2)^5}dx=\int \frac{3(x-2)^3+14(x-2)^2+20(x-2)+13}{(x-2)^5}dx$$

$$=\int \frac{3(x-2)^3}{(x-2)^5}dx+\int \frac{14(x-2)^2}{(x-2)^5}dx+\int \frac{20(x-2)}{(x-2)^5}dx+\int \frac{13}{(x-2)^5}dx$$

$$=\int \frac{3}{(x-2)^2}dx+\int \frac{14}{(x-2)^3}dx+\int \frac{20}{(x-2)^4}dx+\int \frac{13}{(x-2)^5}dx$$

$$=-3(x-2)^{-1}+\frac{14}{-2}(x-2)^{-2}+\frac{20}{-3}(x-2)^{-3}+\frac{13}{-4}(x-2)^{-4}+C$$

$$=\frac{-3}{x-2}+-\frac{7}{(x-2)^2}+-\frac{20}{3(x-2)^3}+-\frac{13}{4(x-2)^4}+C$$

例題:(綜合除法假分式)求不定積分

$$\int \frac{3x^4-6x+3}{(x+1)^3}dx$$

SOL:

(1)以綜合除法將分子的 x 改成 $(x+1)$ 表示(要注意補 0)

$$
\begin{array}{ccccc|c}
3 & 0 & 0 & -6 & 3 & -1 \\
 & -3 & 3 & -3 & 9 & \\
\hline
3 & -3 & 3 & -9 & 12 & \\
 & -3 & 6 & -9 & & \\
\hline
3 & -6 & 9 & -18 & & \\
 & -3 & 9 & & & \\
\hline
3 & -9 & 18 & & & \\
 & -3 & & & & \\
\hline
3 & -12 & & & &
\end{array}
$$

圖. 綜合除法

$$3x^4-6x+3=3(x+1)^4-12(x+1)^3+18(x+1)^2-18(x+1)+12$$

(2)拆開原式積分成為 5 項

$$\int \frac{3x^4-6x+3}{(x+1)^3}dx=\int \frac{3(x+1)^4-12(x+1)^3+18(x+1)^2-18(x+1)+12}{(x+1)^3}dx$$

$$=\int \frac{3(x+1)^4-12(x+1)^3+18(x+1)^2-18(x+1)+12}{(x+1)^3}dx$$

$$=\int 3(x+1)dx-\int 12dx+\int \frac{18}{x+1}dx-\int \frac{18}{(x+1)^2}dx+\int \frac{12}{(x+1)^3}dx$$

$$=\frac{3}{2}(x+1)^2-12x+18\ln(x+1)+\frac{18}{x+1}-\frac{6}{(x+1)^2}+C$$