

精熟學習

1. 求不定積分 $\int x^2 dx$ (基本多項式積分一)

- (A) $2x^3 + C$ (B) $\frac{1}{3}x^3 + C$ (C) $\frac{1}{3}x^3 + C$ (D) $\frac{1}{3}x^3 + C$

SOL: 根據多項式的反微分規則

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int x^{-1} dx = \ln x + C, n = -1$$

故選(C)

2. 求不定積分 $\int \frac{1}{x} dx$ (基本多項式積分二)

- (A) $\ln x + C$ (B) $\frac{1}{2}x^2 + C$ (C) $\frac{1}{2}x^0 + C$ (D) $\frac{1}{x^2} + C$

SOL: 根據多項式的反微分規則

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int x^{-1} dx = \ln x + C, n = -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln x + C$$

故選(A)

3. 求不定積分 $\int (3x^2 - 2x - 3) dx$ (基本多項式積分三)

- (A) $2x^3 - 2x + C$ (B) $x^3 - x^2 - 3x + C$
(C) $\frac{1}{3}x^3 - x^2 + C$ (D) $x^3 - x^2 - 3x + C$

SOL: 根據多項式的反微分規則

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int x^{-1} dx = \ln x + C, n = -1$$

$$\int (3x^2 - 2x - 3) dx = \frac{3}{3}x^3 - \frac{2}{2}x^2 - 3x + C = x^3 - x^2 - 3x + C$$

故選(D)

4.求不定積分 $\int \sqrt{x} dx$ (基本多項式積分四)

(A) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$ (B) $\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + C$ (C) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + C$ (D) $\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$

SOL:根據多項式的反微分規則

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x, n = -1$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{2}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

故選(A)

5.求不定積分 $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ (基本多項式積分五)

(A) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$ (B) $2\sqrt{x} + C$ (C) $\frac{2}{\sqrt{x}} + C$ (D) $\frac{\sqrt{x}}{2} + C$

SOL:根據多項式的反微分規則

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x, n = -1$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C$$

故選(B)

6.求不定積分 $\int \frac{1}{2x+5} dx$ (口訣速解一)

SOL:反微分規則，

$$\int \frac{k}{mx+n} dx = k \cdot \frac{1}{m} \ln(mx+n) + C,$$

訣:分子常數，分母一次式其積分為 $\ln$

$$\int \frac{1}{2x+5} dx = \frac{1}{2} \ln(2x+5) + C$$

7.求不定積分 $\int \frac{3x^9}{x^{10}+5} dx$ (口訣速解二)

SOL:反微分規則，

訣:若分母的微分=分子，則其積分為 $\ln(\text{分母})$

$$\int \frac{3x^9}{x^{10}+5} dx = 3 \int \frac{x^9}{x^{10}+5} dx$$

為了套用口訣，分子缺 10，硬湊分子一個 10，分母當然也補一個 10

$$3 \int \frac{x^9}{x^{10}+5} dx = \frac{3}{10} \int \frac{10x^9}{x^{10}+5} dx$$

套用”分母的微分=分子”，則其積分為 $\ln(\text{分母})$

$$\frac{3}{10} \int \frac{10x^9}{x^{10}+5} dx = \frac{3}{10} \ln(x^{10}+5) + C$$

8. 求不定積分 $\int \tan x dx$ (口訣速解三)

SOL: 反微分規則，

訣：若分母的微分=分子，則其積分為 $\ln(\text{分母})$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

發現差一個負號，硬湊分子一個負號，積分外當然也補一個負號

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(-\sin x)}{\cos x} dx$$

套用口訣

$$- \int \frac{(-\sin x)}{\cos x} dx = -\ln(\cos x) + C$$

也可以將負號移至真數的次方位置

$$-\ln(\cos x) + C = \ln(\cos x)^{-1} + C = \ln(\sec x) + C$$

9. 求不定積分 $\int x(x^2+2)^5 dx$ (變數變換法一) SOL: 若無法

直接看出反微分答案，就須利用變數變換法

$$\text{令 } u = x^2 + 2, \quad du = 2x dx$$

$$\int x(x^2+2)^5 dx = \int (u)^5 x dx$$

硬湊一個 2 到後面，以符合 $du = 2x dx$ ，但也別忘記前面要補 $\frac{1}{2}$

$$\int (u)^5 x dx = \frac{1}{2} \int (u)^5 2x dx = \frac{1}{2} \int u^5 du$$

根據多項式的積分法則

$$\frac{1}{2} \int u^5 du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} u^6 + C = \frac{1}{12} (x^2+2)^6 + C$$
