第一週	主題一:數 主題二：函數 主題三：一元二次方程式 主題四：直線方程式
第二週	主題五：極限
第三週	主題六：連續性
第四週	主題七：漸近線
第五週	主題八：導函數
第六週	主題九：指數與對數
第七週	主題十：指數與對數的微分
第八週	主題十一：微分技巧延伸
第九週	主題十二：三角函數(一)
第十週	主題十三：三角函數(二)
第十一週	主題十四：三角函數的微分
第十二週	主題十五：相對極大與極小
第十三週	主題十六：絕對極值
第十四週	主題十七：近似值
第十五週	主題十八：相關變律
第十六週	主題十九 ： 羅必達法則
第十七週	主題二十：不定積分
第十八週	主題二十一：不定積分的其他技巧

第十七週 不定積分

主題二十：不定積分		
	PART 1：反導數	
	O01	假設$F'(x)=f(x)$，我們稱$F(x)$的導函數是$f(x)$，也就是說$f(x)$的反導數為$F(x)$，記做 $$\int f(x)dx=F(x)+C$$ 其中C為任意常數，反導數又稱為不定積分 例如: $\frac{d}{dx}\left(x^2\right)=2x$，則$\int 2xdx=x^2+C$ $\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$，則$\int \cos xdx=\sin x+C$
	PART 2：基本積分法則	
	O02	根據微分基本性質，不定積分(反微分)具有下列基本性質 1.$\int kdu=ku+C$ 2.$\int k\cdot f(x)du=k\int f(x)du+C$ 3.$\int [f(u)\pm g(u)]du=\int f(u)du\pm\int g(u)du$ 4.$\int u^n dx=\begin{cases}\frac{1}{n+1}u^{n+1}+C & n\neq -1\\ \ln u+C & n=-1\end{cases}$
	PART 3：常用的函數積分	
	O03	1. 最常見的積分函數首推多項式，但多項式並非只有下列這種 $(a)\int x^{10}dx=$ ______ $ANS:$ $\frac{1}{11}x^{11}+C$ 下列這些題型都是是多項式的題型，各位同學要熟悉指數率 $(b)\int \frac{1}{x^3}dx=$ ______ $ANS:$ $-\frac{1}{2}x^{-2}+C$ $(c)\int \sqrt{x}dx=$ ______ $ANS:$ $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+C$ $(d)\int \frac{1}{x}dx=$ ______ $ANS:$ $\ln x+C$ $x>0$ 說明:以上例題都屬於積分法則 4 的狀況，依照下列說明，同學應該套用積分法則 4 輕易寫出正確答案 $(b)\ \frac{1}{x^3}=x^{-3}$，$(c)\ \sqrt{x}=x^{1/2}$，$(d)\ n=-1$是特殊狀況，答案是自然對數$\ln x$ 2. 自然指數與一般指數函數 $(e)\int e^x dx=$ ______ $ANS:$ e^x+C

$(f)\int a^x dx =$ ______ $ANS:\ \underline{\dfrac{a^x}{\ln a}+C}$

3. 三角函數

$(g)\int \cos dx =$ ______ $ANS:\ \underline{\sin x + C}$

$(h)\int \sin dx =$ ______ $ANS:\ \underline{-\cos x + C}$

$(i)\int \sec x \tan x dx =$ ______ $ANS:\ \underline{\sec x + C}$

$(i)\int \sec x \tan x dx =$ ______ $ANS:\ \underline{\sec x + C}$

$(j)\int \sec^2 x dx =$ ______ $ANS:\ \underline{\tan x + C}$

4. 反三角相關.

$(k)\int \dfrac{1}{1+x^2} x dx =$ ______ $ANS:\ \underline{Tan^{-1}x + C}$

$(l)\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} x dx =$ ______ $ANS:\ \underline{Sin^{-1}x + C}$

要學好積分，看到以上這些不定積分，必須直接寫得出答案，才能培養解決更複雜的積分，同學若知道答案從何而來，可以試著將答案微分看看並複習前面相關單元。

PART 4：變數變換法(一)

O04

當不定積分中被積分函數太過複雜，可以將被積分函數一部分設為u，當然dx也要依照微分規則轉換成du，將原來變數為x徹底換為u，將原來複雜題型簡化，最後再將u換為x

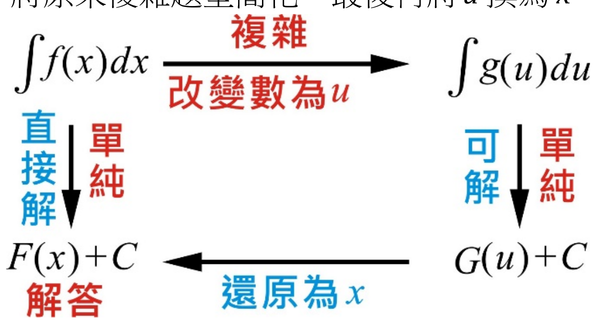

圖 1.變數變換思考方向

例題:求不定積分

$$\int x^3(x^4+2)^{20}dx$$

SOL:

(1)檢視題目，若無法直接看出答案，準備令u以簡化題目

(2)令$u = x^4+2$，則$\dfrac{du}{dx} = 4x^3$，也就是$du = 4x^3dx$，準備就緒後將原題目徹底改以u表示

(3)原式為$\int x^3(x^4+2)^{20}dx = \int x^3u^{20}dx = \int u^{20}\cdot\dfrac{1}{4}du = \dfrac{1}{4}\int u^{20}du$

$= \dfrac{1}{84}u^{21} + C$ (成功解出答案)

(4)將u換為x解答才算真正完整，$\int x^3(x^4+2)^{20}dx =$

$$\frac{1}{84}u^{21}+C=\frac{1}{84}\left(x^4+2\right)^{21}+C$$

PART 4：變數變換法(二)

O05

同學若認為令 u 在算式上太過繁瑣，若能善用下列技巧可將算式簡化許多，由 dx 的改變著手，以下微分式可以

$$\because\frac{de^x}{dx}=e^x \quad\Rightarrow\quad e^x dx=de^x$$

$$\because\frac{d\sin x}{dx}=\cos x \quad\Rightarrow\quad \cos x dx=d\sin x$$

$$\because\frac{d\cos x}{dx}=-\sin x \quad\Rightarrow\quad \sin x dx=-d\cos x$$

$$\because\frac{d\ln x}{dx}=\frac{1}{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{x}dx=d\ln x$$

$$\because\frac{d(x^2+C)}{dx}=2x \quad\Rightarrow\quad 2xdx=d(x^2+C),\quad C \text{ 任意常數}$$

例題:(變數變換)求不定積分

$$\int\cos x\cdot\sin^{10}x\,dx$$

SOL:(直接將 $\cos x dx$ 合併為 $d\sin x$

$$\int\cos x\cdot\sin^{10}x\,dx=\int\sin^{10}x\,d\sin x=\frac{1}{11}\sin^{11}x+C$$

例題:(變數變換)求不定積分

$$\int\frac{1\text{n}x}{x}dx$$

SOL:(直接將 $\frac{1}{x}dx$ 合併為 $d\ln x$)

$$\int\frac{1\text{n}x}{x}dx=\int 1\text{n}x\,d\ln x=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$$

PART 5：對數微分題型口訣快速解題

根據下列的微分式(真數 >0)

$$\because\frac{d\ln(x^2+1)}{dx}=\frac{2x}{x^2+1} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{2x}{x^2+1}dx=\ln(x^2+1)+C$$

$$\because\frac{d\ln(x^3+5)}{dx}=\frac{3x^2}{x^3+5} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{3x^2}{x^3+5}dx=\ln(x^3+5)+C$$

$$\because\frac{d\ln(x^4+10)}{dx}=\frac{4x^3}{x^4+10} \quad\Rightarrow\quad \int\frac{4x^3}{x^4+10}dx=\ln(x^4+10)+C$$

由上述之結果可以看出

"被積分函數是分式，分子若恰好是分母的微分，則積分為 $\ln$ (分母)"

口訣: 上=下' $\Rightarrow$ $\int=\ln$ (下)

例題:(快速解積分)求不定積分

$$\int\frac{x^9}{x^{10}+7}dx$$

SOL:(下= $x^{10}+7$ ，下的微分=$10x^9$ ，與上面相同多 10 倍)

$$\int\frac{x^9}{x^{10}+7}dx=\frac{1}{10}\int\frac{10x^9}{x^{10}+7}dx=\frac{1}{10}\ln(x^{10}+7)+C=\frac{1}{2}(\ln x)^2+C$$

例題:(快速解積分)求不定積分

$\int \tan x\, dx$

SOL:($\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ ，上=下' 差一負號)

$\int \tan x\, dx = -\ln(\cos x) = \ln(\cos x)^{-1} + C = \ln(\sec x) + C$

PART 6：非歐拉數為底之指數函數

我們知道微分 e^x 等於自己，也就是 $\dfrac{de^x}{dx} = e^x$ 最簡單的微分題型，使用對數微分法可以算出非歐拉數為底的指數函數 $\dfrac{da^x}{dx} = a^x \ln a$ ，微分會多出一個 $\ln a$ ，於是

$\int e^x\, dx = e^x + C$

$\int a^x\, dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$

例題:(非歐拉數為底之指數函數)

求不定積分

$\int 2^x\, dx$

SOL:無須算式，直接寫答案 $\int 2^x\, dx = \dfrac{2^x}{\ln 2} + C$

例題:(非歐拉數為底之指數函數)

求不定積分

$\int x \cdot 3^{x^2+2}\, dx$

這題前面有 x ，尚能求解，若沒有 x 就成高等函數，屬高等微積分範疇，同學毋須花太多時間於此。

SOL:(令 $x^2 + 2 = u$ ， $2xdx = du$)

$\int x \cdot 3^{x^2+2}\, dx = \int 3^u \cdot x\, dx = \int 3^u \dfrac{1}{2}\, du = \dfrac{1}{2}\int 3^u\, du = \dfrac{1}{2}\dfrac{3^u}{\ln 3} + C = \dfrac{3^{x^2+2}}{2\ln 3} + C$

PART 6：分式遷就分母原則

我們比較下列兩個分式函數的積分

$(a)\int \dfrac{x-1}{x}\, dx$ 與 $(b)\int \dfrac{x}{x-1}\, dx$

(a) 的解法非常容易，因為分母單純，我們可以拆成兩項分開積分

$\int \dfrac{x-1}{x}\, dx = \int \left(\dfrac{x}{x} - \dfrac{1}{x}\right) dx = \int \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) dx = x - \ln x + C$

(b) 的解法相對較不容易，因為分母有 2 項，我們可以仿造 (a) 的解法，只是將 $(x-1)$ 綁起來，作法如下

$(b)\int \dfrac{x}{(x-1)}\, dx = \int \dfrac{x}{(x-1)}\, d(x-1) = \int \dfrac{(x-1)+1}{(x-1)}\, d(x-1) = \int [1 + \dfrac{1}{(x-1)}] d(x-1)$

$= (x-1) + \ln(x-1) + C$ ，同學若感覺太複雜可以令 $u = (x-1)$ 會較為清楚。

例題:(遷就分母)

求不定積分

$\int \dfrac{x^2}{x+2}\, dx$

SOL:(令 $x + 2 = u$)

$$\int \frac{x^2}{x+2}\,dx = \int \frac{(u-2)^2}{u}\,du = \int \frac{u^2-4u+4}{u}\,du = \int \left(u-4+\frac{4}{u}\right)du$$

$$=\frac{1}{2}u^2-4u+4\ln u+C=\frac{1}{2}(x+2)^2-4(x+2)+4\ln(x+2)+C \quad 註: x+2>0$$

PART 7：避重就輕原則

當遇到此類題型

$$\int x(1-x)^{20}\,dx$$

我們不希望20次方位置放在$(1-x)$之上，所以令$u=1-x \Rightarrow x=1-u \Rightarrow dx=-du$

SOL:原式=

$$\int x(1-x)^{20}\,dx = -\int (1-u)u^{20}\,du = \int (u-1)u^{20}\,du = \int (u^{21}-u^{20})\,du = \frac{u^{22}}{22}-\frac{u^{21}}{21}+C$$

$$=\frac{(1-x)^{22}}{22}-\frac{(1-x)^{21}}{21}+C$$

例題:(避重就輕選擇)

求不定積分

$$\int x^2\sqrt{x+3}\,dx$$

我們希望根號內愈簡單愈好，所以令$u=x+3 \Rightarrow x=u-3 \Rightarrow dx=du$

SOL:原式=

$$\int x^2\sqrt{x+3}\,dx = \int (u-3)^2\sqrt{u}\,du = \int (u^2-6u+9)u^{1/2}\,du = \int (u^{5/2}-6u^{3/2}+9u^{1/2})\,du$$

$$=\frac{2}{7}u^{7/2}-6\cdot\frac{2}{5}u^{5/2}+9\cdot\frac{2}{3}u^{3/2}+C = \frac{2}{7}(x+3)^{7/2}-\frac{12}{5}(x+3)^{5/2}+6(x+3)^{3/2}+C$$