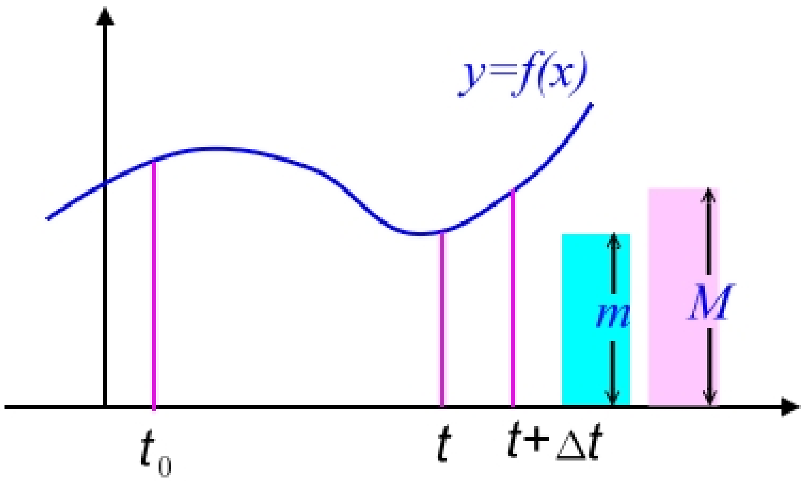
微分與積分的橋樑

微分的目的是為計算切線的斜率(瞬間的變化率)，積分的目的為求曲線下的面積，這兩者表面看來似乎毫無相關，而微積分基本定理如一座橋般將兩者串聯在一起

微積分第一基本定理



$$A'(t)=\left(\int_{t_0}^{t} f(t)dt\right)'=f(t)$$

證明

$$A(t+\Delta t)-A(t)$$

$$m\Delta t \le A(t+\Delta t)-A(t) \le M\Delta t$$

$$m \le \frac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t} \le M$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t}=f(t)$$

$$f(t)\le \lim_{\Delta t\to 0}\frac{A(t+\Delta t)-A(t)}{\Delta t}\le f(t)$$

$$A'(t)=f(t)$$

微積分第二基本定理

若 $F'(x)=f(x)$

$$\int_a^b f(x)=F(b)-F(a)$$

證明

$$A(x)=F(x)+c$$

$$A(t_0)=F(t_0)+c=0$$

$$c=-F(t_0)$$

$$A(x)=F(x)+c$$

$$A(x)=F(x)-F(t_0)$$

$$A(x)=\int_{t_0}^{x} f(t)dt=F(x)-F(t_0)$$