精熟學習

1.求極限 $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$ (羅必達法則題型一)

(A) e (B) 1 (C) 0 (D) $\frac{1}{e}$

SOL:

(1)發現 $\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$ 為 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型

(2)使用羅必達法則

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1/x}{1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

故選(C)

----

2. 求極限 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ (羅必達法則題型二)

(A) 1 (B) 0 (C) π (D) ∞

SOL:

(1)發現 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ 為 $\frac{0}{0}$ 不定型

(2)使用羅必達法則

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\overset{L}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=\frac{\cos 0}{1}=1$$

故選(A)

----

3. 求極限 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+5}{x^2+2}$ (羅必達法則題型三)

(A) 3 (B) 0 (C) -4 (D) ∞

SOL:

(1)發現 $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+5}{x^2+2}$ 為 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型

(2)使用羅必達法則

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-4x+5}{x^2+2}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{6x-4}{2x}$$ 仍為 $\frac{\infty}{\infty}$ 不定型

(3) 再次使用羅必達法則

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x-4}{2x}\overset{L}{=}\lim_{x\to\infty}\frac{6}{2}=3$$

故選(A)

(A)4. 求極限 $\lim_{x\to 0^+} x^x$ (羅必達法則題型四)

(A) 1 (B) e (C) $\frac{1}{e}$ (D) 0

SOL:

(1)發現 $\lim_{x\to 0^+} x^x$ 為 0^0 不定型

(2)改造表達方式以便使用羅必達法則

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x}$$

(3)考慮 $\lim_{x\to 0^+} x\ln x$ 為 $0\cdot(-\infty)$ 不定型，

(4)將乘法改為除法以便使用羅必達法則

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\left(1/x\right)}$$ 為 $\frac{-\infty}{\infty}$ 不定型

(5) 使用羅必達法則

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\left(1/x\right)} \overset{L}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(1/x\right)}{-\left(1/x^2\right)} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

(6)此結果代回(2)式

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$$

故選(A)

----

5. 求極限 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^2}$ (羅必達法則題型五)

(A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) 0

SOL:

(1)發現 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^2}$ 為 $\frac{0}{0}$ 不定型

(2) 使用羅必達法則

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \tan x}{x^2} \overset{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sec^2 x}{2x}$$ 為 $\frac{0}{0}$ 不定型

(3)發現仍為不定型，反覆使用羅必達法則

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sec^2 x}{2x} \overset{L}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x - 2\sec^2 x \tan x}{2} = \frac{0-0}{2} = 0$$

故選(D)
