

第一週	主題一:數 主題二：函數 主題三：一元二次方程式 主題四：直線方程式
第二週	主題五：極限
第三週	主題六：連續性
第四週	主題七：漸近線
第五週	主題八：導函數
第六週	主題九：指數與對數
第七週	主題十：指數與對數的微分
第八週	主題十一：微分技巧延伸
第九週	主題十二：三角函數(一)
第十週	主題十三：三角函數(二)
第十一週	主題十四：三角函數的微分
第十二週	主題十五：相對極大與極小
第十三週	主題十六：絕對極值
第十四週	主題十七：近似值
第十五週	主題十八：相關變律
第十六週	主題十九：羅必達法則
第十七週	主題二十：不定積分
第十八週	主題二十一：不定積分的其他技巧

第十六週 羅必達法則

主題十六：

羅必達法則

PART 1：均值定理

J05

均值定理，又稱拉格蘭吉均值定理，其內容是：
假設函數 $y = f(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 連續且在開區間 (a, b) 可微分，
必存在 $c \in (a, b)$ ，使

$$\text{割線斜率} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = \text{切線斜率},$$

$$\text{也就是 } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

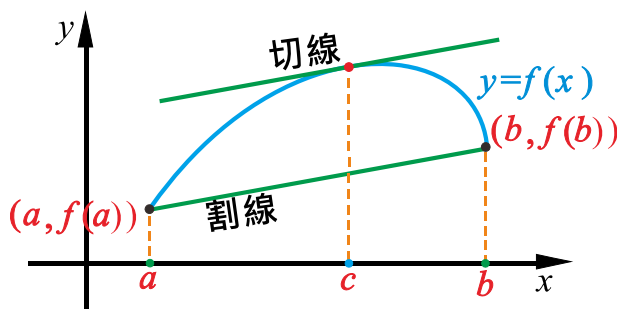


圖 1. 均值定理的幾何解釋

PART 2：洛爾定理

洛爾定理：是均值定理的特例，函數 $y = f(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 連續且在開區間 (a, b) 可微分，當 $f(a) = f(b)$ 時，至少存在 $c \in (a, b)$ ，使 $f'(c) = 0$

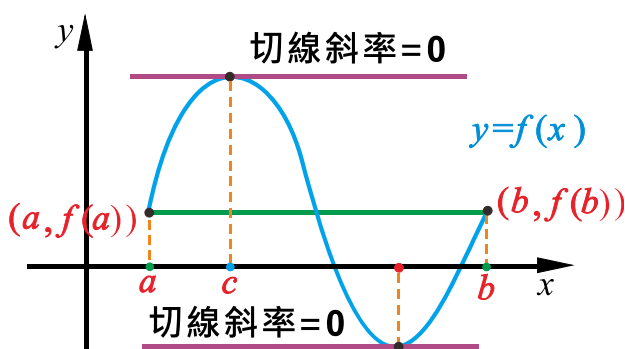


圖 1. 洛爾定理的幾何解釋

PART 3：柯西均值定理

J15

如果函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 滿足

1. 在閉區間 $[a, b]$ 連續
2. 在開區間 (a, b) 可微分
3. 對所有 $x \in (a, b)$ ， $g'(x) \neq 0$

那麼必存在 $c \in (a, b)$ 使 $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$ 成立。

此定理稱為柯西均值定理，是均值定理的推廣，均值定理可以說是柯西均值定理的特例。

在此說明柯西均值定理的目的在於，證明羅必達法則的過程中時需要用到此定理的結果。

PART 3：羅必達法則之證明

J11

(1)羅必達法則的內容:

假設 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = B$, 則 $\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{B}{A}$,

但若 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ 且 $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$, 極限 $\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{f(x)}$ 稱為不定型 $\frac{0}{0}$,

極限 $\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{g'(x)}{f'(x)}$

(2)不定型有多種表示法 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞^0 , 1^∞ , 0^0

(3)羅必達法則的證明過程要利用柯西均值定理的結果, 同學可欣賞證明的思考模式, 證明過程無須強記。

PART 4：羅必達法則 $\frac{0}{0}$ 與 $\frac{\infty}{\infty}$ 題型

J12

在前面部分證明了羅必達法則中, 當極限 $\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{f(x)}$ 為不定型時

$\lim_{x \rightarrow c} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{g'(x)}{f'(x)}$, 這種是最基本題型

例題(不定型 $\frac{0}{0}$)

求極限 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$

SOL (1)分解因式法, 此方法遇到不好分解或超越函數時無效

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x + 3)}{1} = 6$

SOL (2)羅必達法, 此方法須注意先是否符合”不定型”, 使用羅必達(L'Hôpital)法則時應在註記 L 於等號上, 如 $\overset{L}{=}$ 來表示, 讓閱讀者知道我們使用羅必達法則。

$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{0}{0}$ 為不定型, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \overset{L}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x}{1} = 6$

例題(不定型 $\frac{0}{0}$)

求極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$

SOL : 代 $x = 0$ 入極限得 $\frac{0}{0}$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} \overset{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^{3x}}{1}$, 代 $x = 0$ 入極限得 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3e^0}{1} = 3$

PART 5：反複使用羅必達法則

我們將欲趨近的數字帶入極限, 當極限出現不定型時, 我們使用羅必達法則(分子分母各自微分後), 再將欲趨近的數字帶入極限, 若還是不定型, 則我們可反覆使用羅必達法則, 直到得出答案為止

例題(重複使用羅必達法則)

求極限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}}$

SOL: 代 $x = -\infty$ 入極限得 $\frac{\infty}{\infty}$ ，確認為不定型

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{e^{-x}} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}}, \text{ 代 } x = -\infty \text{ 入極限得 } \frac{-\infty}{-\infty}, \text{ 還是不定型, 繼續使用羅必達}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{-e^{-x}} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

PART 6: 羅必達法則 $0 \cdot \infty$ 與 0^0 題型

J13

羅必達法則求極限最厲害的部份在於解決超越函數的極限問題，當遇到 $0 \cdot \infty$ 型問題時，我們的策略是

(1) 選擇其中一個函數變成倒數的倒數使 $0 \cdot \infty$ 型的問題轉成

$$\frac{0}{\left(\frac{1}{\infty}\right)} = \frac{0}{0} \text{ 或 } \frac{\infty}{\left(\frac{1}{0}\right)} = \frac{\infty}{\infty} \text{ 以便執行羅必達法則}$$

例如

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x, \text{ 同學首先應審視題目, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = ?$$

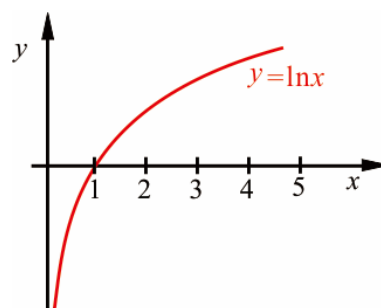


圖 3. $y = \ln x$ 之圖形

圖 3 可以看出當 x 由右方向 0 靠近， $y = \ln x$ 函數值會趨近 $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x \quad (0 \cdot -\infty) \text{ 型, 我們將 } x \text{ 搬到分母}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\left(\frac{1}{x}\right)} \quad \left(\frac{-\infty}{\infty}\right) \text{ 型, 預備採用羅必達法則}$$

$$\stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\frac{1}{x}\right)}{-\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

例題(不定型 0^0)

求極限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

SOL: 要利用性質 $f(f^{-1}(x)) = x$ ， f 為自然指數， f^{-1} 為自然對數，將 x^x 取對數，再

取指數可恢復原狀，也就是 $e^{\ln(x^x)} = x^x \Rightarrow x^x = e^{\ln(x^x)} = e^{x \ln x} = e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$

原題目 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1$ (利用前面例題的結果)

PART 7：羅必達法則 1^∞ 題型

同學或許問，1的任何次方不都是1嗎？首先我們必須了解此處的1是代入的極限值，並非恆為1，這種題型依樣要利用指對數恆等式搭配對數律，運用羅必達法則解題。

例題(不定型 1^∞)

求極限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$

SOL：代 $x = 0$ 入極限得 1^∞ ，確認為不定型，

$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x}}}$ ，再利用對數律，

$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(\cos x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x}}$ ，觀察指數部分之極限，代 $x = 0$ 入極限得 $\frac{0}{0}$ ，還是

不定型，準備使用羅必達

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = e^0 = 1$$

PART 8：羅必達法則 $\infty - \infty$ 題型

J16

遇到 $\infty - \infty$ 的題型採用合併通分整合成為一個分式後，再使用羅必達法則

例題(不定型 $\infty - \infty$)

求極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$

SOL：代 $x = 0$ 入極限得 $\infty - \infty$ ，確認為不定型，準備通分

$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x}$ ，代 $x = 0$ 入極限得 $\frac{0}{0}$ ，準備使用羅必達法則

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x}$ ，代 $x = 0$ 入極限得 $\frac{0}{0}$ ，再次使用羅必達法則

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} \stackrel{L}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x \sin x}$ 代 $x = 0$ 入極限得 $\frac{0}{1+1+0} = 0$