九十二年度中華技術學院論文發表研討會
中華民國 92 年 4 月 23 日

變分法上的最速降線之研究
Calculus of Variation -the Brachistochrone Problem

李柏堅
Bor- Jian Lee
中華技術學院共同科講師

中文摘要

考慮點 A 和位置較低的點 B 以一條直線相連，在不考慮摩擦力的前提下，一顆靜止的滾珠由 A 點滑向 B 點，現在我們直線換成曲線試試看，以哪種線作為路徑，花費的時間可以最少? 花費的時間最少的曲線就稱為最速降線。伽利略認為最速降線必是圓弧，但約翰白努利不認為如此，為了解決這個問題，柏努利開創了變分學這門學問。

Abstract

Consider a point A is joined by a straight wire to a lower point B, and that a bead is allowed to slide without friction down the wire from A to B. We can also consider the case where the wire is bent into an arbitrary curve. In which case does a bead take the least time? The curve with the least time is called the brachistochrone. Galileo believed that the bead would descend more quickly along a circle path, but Johann Bernoulli did not think so, for it was the analysis of this problem by Johann Bernoulli who attempted to solve the argument, that led to the formal foundation of the calculus of variation.

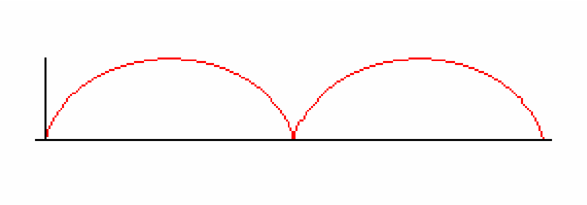
Keywords: brachistochrone, tautochrone, geodesic
關鍵詞：最速降線，等時曲線，測地線

一、簡介

brachistochrone 源於希臘文，意思是最快時間，這是一個古老的問題，談到這個問題，就不能不提到柏努利，柏努力不是指一個人，而是指整個柏努利家族，這個家族出了許多偉大的數學家，與 brachistochrone 問題有關的，就是柏努利兄弟約翰(Johann)①和雅各(Jacob)②，十七世紀末，弟弟 Johann Bernoulli 公開徵求問題解答③，他自己也求出了解答，不過他採用的方法用到物理觀念，而哥哥 Jacob Bernoulli 用的方法，就是現在我們所用的變分法，雖然兩人解出的答案一樣，為了這個問題的解法，弟弟約翰受到哥哥的批評，兄弟感情弄到決裂。在本文中，我們先將早期以物理的角度證明方式所需要的物理定律、計算過程做一完整說明(Johann 法)，並將所得結果和其他常見的曲線做一比較。最後再看看以變分方式所得的結果(Jacob 法)有何不同?本文以通俗數學和歷史的角度探索變分法的由來，再將變分法的應用及發展做一簡單介紹。

定義：

方程式 $\begin{aligned} x &= a(\theta - \sin\theta) \\ y &= a(1-\cos\theta) \end{aligned}$



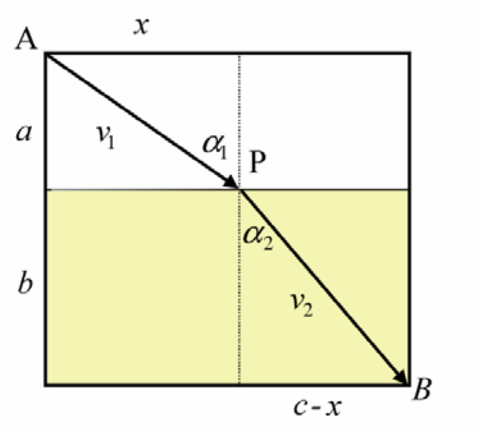
為擺線(cycloid)方程式的標準式，它是一個圓沿著 x 軸滾動，由圓上的一固定點所成的軌跡。

定理：斯乃爾(Snell) 折射定律④

考慮光線以 v_1 為速率由 A 點出發，到達 P 點，再以 v_2 為速率由 P 點進入一密度較高的介質到達 B 則

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\frac{\sin\alpha_2}{v_2}$$

其中 α_1,α_2 為與法線的夾角，如下圖



證明：
由 A 點出發，到達 P 點，再以 v_2 為速率由 P 點進入一密度較高的介質到達 B，總共所耗用的時間為

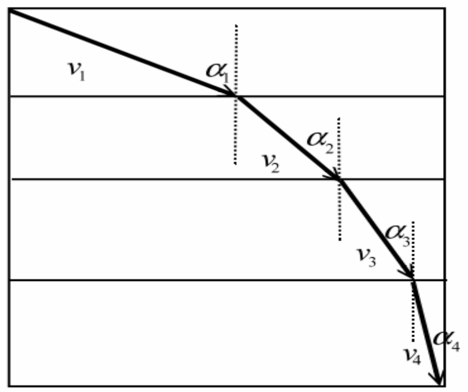
$$T(x)=\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{(c-x)^2+b^2}}{v_2}$$

若要耗用的時間最少，則 $\frac{dT}{dx}=0$

得 $\frac{x}{v_1\sqrt{x^2+a^2}}-\frac{c-x}{v_2\sqrt{(c-x)^2+b^2}}=0$

故得到 $\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\frac{\sin\alpha_2}{v_2}$

推廣：若通過多種介質(密度漸漸增高)，如下圖

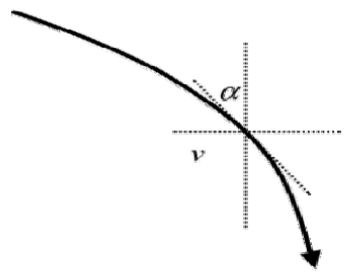


根據前面的結果，可知

$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\frac{\sin\alpha_2}{v_2}=\frac{\sin\alpha_3}{v_3}=\frac{\sin\alpha_4}{v_4}$$

費馬最小時間定理：
光線進入連續變化密度的介質，光線不再以直線進行，而是以曲線取代直線，並滿足

$$\frac{\sin\alpha}{v}=\text{常數}$$

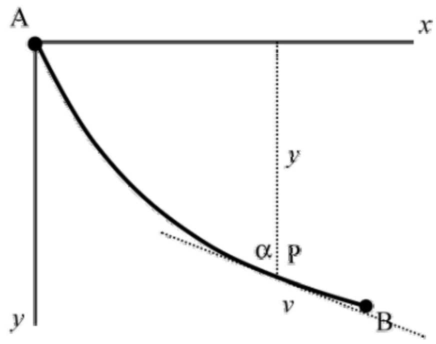


光學上的費馬定理意思是說，光線由點 A 行進到點 B 的路徑，為最短時間的路徑，在均勻的介質中，路徑應該就是直線，但折射率有變化的介質中路徑就會彎曲。

二、Brachistochrone 的古典證明

(Johann Bernoulli 方法)

定理：最速降線為擺線
證明：
假設滾珠如同光線一般能找尋花費最少時間的路徑，如下圖，根據費馬最小時間定理，我們要求



$$\frac{\sin\alpha}{v}=\text{常數}$$

再由能量守恆定律，A 點的位能轉成 P 點的動能

$$\frac{1}{2}mv^2=mgy$$

$$v=\sqrt{2gy}$$

$$\sin\alpha = \cos\beta = \frac{1}{\sec\beta} = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\beta}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}}$$

(此處 $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$，$\beta$ 是與 x 軸的夾角，切線斜率 $\frac{dy}{dx} = -\tan\beta$)

因為 $\frac{\sin\alpha}{v} =$ 常數

$\frac{1}{\sqrt{2gy(1+(\frac{dy}{dx})^2}} = C$,也就是

$$y[1+(\frac{dy}{dx})^2] = k$$

$$(\frac{dy}{dx})^2 = \frac{k}{y} - 1$$

$$(\frac{dy}{dx}) = \sqrt{\frac{k-y}{y}}$$

變成一個可變數分離常微分方程式

$$dx = \sqrt{\frac{y}{k-y}}dy$$

兩邊積分得

$$\int dx = \int \sqrt{\frac{y}{k-y}}dy$$

令 $y = k\sin^2\theta$

$$dy = 2k\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$x = \int \tan\theta \cdot 2k\sin\theta\cos\theta d\theta$$

$$= \int 2k\sin^2\theta d\theta$$

$$= k\int(1-\cos 2\theta)d\theta$$

$$= k(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta)$$

因為

$$x = \frac{1}{2}k(2\theta - \sin 2\theta)$$

$$y = k\sin^2\theta = k(\frac{1-\cos 2\theta}{2})$$

$$= \frac{k}{2}(1-\cos 2\theta)$$

在此將變數 $\frac{k}{2} = a$，$2\theta = \phi$

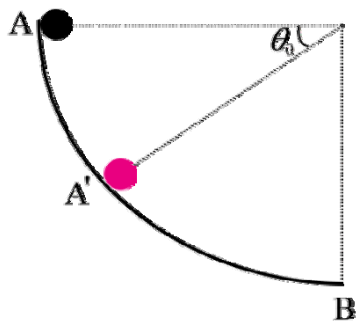
於是得到了最速降線的參數式

$$\begin{cases} x = a(\theta - \sin\theta) \\ y = a(1-\cos\theta) \end{cases}$$

就是擺線(cycloid)的標準式

三、擺線的 tautochrone 性質⑤

定理：擺線為等時曲線



證明：根據

$$ds = vdt$$

$$t_{AB} = \int \frac{ds}{v}$$

計算由 A(0,0) 點經由擺線路徑滑到座標 B($\pi a, -2a$)所花費的時間

$$t_{AB} = \int_0^\pi \frac{ds}{\sqrt{2gy}}$$

$$= \int_0^\pi \frac{ds}{\sqrt{2ga(1-\cos\theta)}}$$

因為

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$= a\sqrt{(1-\cos\theta)^2 + (\sin\theta)^2}d\theta$$

$$= a\sqrt{2-2\cos\theta}d\theta$$

$$t_{AB} = \int_0^\pi \frac{ds}{\sqrt{2ga(1-\cos\theta)}}$$

$$= \int_0^\pi \frac{a\sqrt{2(1-\cos\theta)}}{\sqrt{2ga(1-\cos\theta)}}d\theta$$

$$= \int_0^\pi \sqrt{\frac{a}{g}}d\theta = \pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

現在再考慮滾珠由中途任一點 A' 出發滑到座標 $(\pi a, -2a)$，則所花費的時間

$$t_{A'B}=\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{a\sqrt{2(1-\cos\theta)}}{\sqrt{2ga(\cos\theta_0-\cos\theta)}}d\theta$$

$$=\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}}\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{(\cos\theta_0-\cos\theta)}}d\theta$$

以一律化為半角方式整理

$$=\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{g}}\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{(\cos^2(\theta_0/2)-\cos^2(\theta/2))}}d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{2a}}{\sqrt{g}\cos(\theta_0/2)}\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{\sin(\theta/2)}{\sqrt{1-\frac{\cos^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta_0/2)}}}d\theta$$

令 $u=\frac{\cos(\theta/2)}{\cos(\theta_0/2)}$，則 $du=-\frac{\sin(\theta/2)}{\cos(\theta_0/2)}d\theta$

$$t_{PB}=-\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}}\int_{1}^{0}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

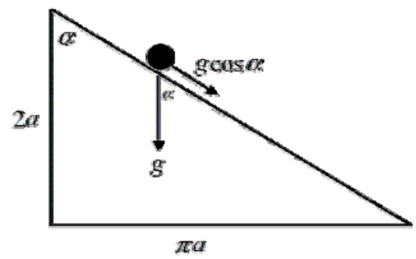
$$=\frac{2\sqrt{a}}{\sqrt{g}}Sin^{-1}(1)=\pi\sqrt{\frac{a}{g}}$$

證明了滾珠由相同擺線上的 A 與 A' 點出發到達 B，所耗用的時間相同而與 θ_0 無關。這個性質，最早由荷蘭數學家惠更斯⑥發現。

四、在相同條件下各種不同曲線耗費時間比較

為了方便與擺線比較，我們一律考慮由 A(0, 0)到 B$(\pi a, -2a)$ 的不同路徑，計算由 A 到 B 所耗用的時間時，常會出現困難的定積分，只得近似值比較，在此的定積分一律以 Maple 程式算到小數點下九位，以利比較。

(1) 路徑為直線：
通過點(0,0)與 $(\pi a, -2a)$ 的直線為等加速度運動



以等加速度的位移公式

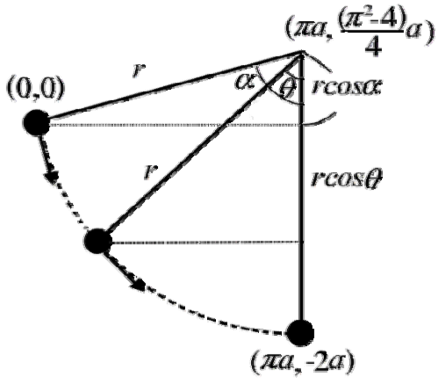
$$s=\frac{1}{2}g\cos\alpha\cdot t^2$$

$$\sqrt{\pi^2a^2+4a^2}=\frac{1}{2}g\frac{2a}{\sqrt{\pi^2a^2+4a^2}}t_{AB}{}^2$$

$$t_{AB}=\sqrt{\frac{\pi^2a+4a}{g}}=\sqrt{\frac{(\pi^2+4)a}{g}}$$

$$\doteq\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot(\ 3.724191778\ )$$

(2) 路徑為圓弧：



圓弧路徑可以用單擺的方法求時間

$$\frac{1}{2}mv^2=mg(r\cos\theta-r\cos\alpha)$$

$$s=r\theta \text{ 且 } v=\frac{ds}{dt}=r(\frac{d\theta}{dt})$$

$$\frac{1}{2}r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=ga(\cos\theta-\cos\alpha)$$

因為 $t\nearrow$ 則 $\theta\searrow$ 故

$$dt=-\sqrt{\frac{r}{2g}}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}}$$

通過點(0,0)以圓弧路徑到達 $(\pi a, -2a)$ 所耗用的時間

$$t_{AB}=-\sqrt{\frac{r}{2g}}\int_{\alpha}^{0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}}$$

$$=\sqrt{\frac{r}{2g}}\int_0^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}}$$

$$=\sqrt{a}\sqrt{\frac{(\pi^2+4)}{8g}}\int_0^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}}$$

這裡的單擺擺長 $r=\dfrac{(\pi^2+4)}{4}a$ ，且

$$\cos\alpha=\frac{\pi^2-4}{\pi^2+4}$$

因為上式定積分化簡後會成為橢圓積分，橢圓積分無法以初等函數來表示，故只得以近似值算出

$$t_{AB}=\sqrt{\frac{a}{g}}\sqrt{\frac{(\pi^2+4)}{8}}\int_0^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}}$$

以電腦計算精確至小數點下第九位，得到

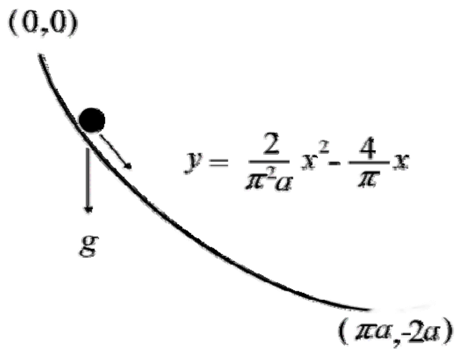
$$\sqrt{\frac{(\pi^2+4)}{8}}\int_0^{\alpha}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\alpha}}$$

$\doteq$ 3.178908586 ，故以圓弧路徑花費的時間

$$t_{AB}\doteq\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot(\ 3.178908586\ )$$

(3) 路徑為拋物線：

拋物線方程式為 $y=\dfrac{2}{\pi^2 a}x^2-\dfrac{4}{\pi}x$



$$t_{AB}=\int_0^{\pi a}\frac{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

$$=\int_0^{\pi a}\frac{\sqrt{1+\dfrac{1}{\pi^4 a^2}(4x-4\pi a)^2}\,dx}{\sqrt{2g\left|\left(\dfrac{2}{\pi^2 a}x^2-\dfrac{4}{\pi}x\right)\right|}}$$

令 $x=\pi au$ ， $dx=\pi a\,du$

$$t_{AB}=\pi a\int_0^{1}\frac{\sqrt{1+(16/\pi^2)(u-1)^2}}{\sqrt{4ag\left|(u^2-2u)\right|}}du$$

$$=\frac{\pi a}{\sqrt{ag}}\int_0^{1}\frac{\sqrt{1+(16/\pi^2)(u-1)^2}}{\sqrt{4(2u-u^2)}}du$$

這積分式經化簡後後也是橢圓積分，以數值方法估計

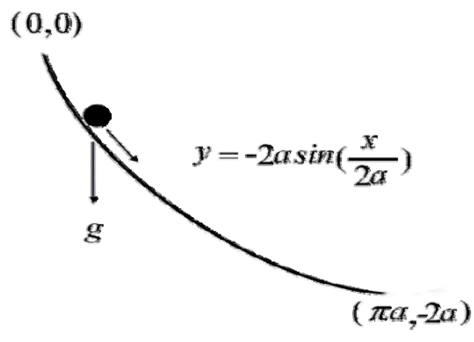
$$\int_0^{1}\frac{\sqrt{1+(16/\pi^2)(u-1)^2}}{\sqrt{4(2u-u^2)}}du\doteq$$

1.042889818

$$t_{AB}=\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot(\ 3.276334991\ )$$

(4) 路徑為正弦函數：

正弦函數方程式為 $y=-2a\sin(\dfrac{x}{2a})$



$$t_{AB}=\int_0^{\pi a}\frac{\sqrt{1+(dy/dx)^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

$$=\int_0^{\pi a}\frac{\sqrt{1+\cos^2(x/2a)}}{\sqrt{2g\left|-2a\sin(x/2a)\right|}}dx$$

變數變換，令 $u=\dfrac{x}{2a}$， $du=\dfrac{dx}{2a}$

則 $t_{AB}=2a\sqrt{\dfrac{1}{4ag}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1+\cos^2 u}}{\sqrt{\sin u}}du$

$$=\sqrt{\frac{a}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1+\cos^2 u}}{\sqrt{\sin u}}du$$

$$\doteq\sqrt{\frac{a}{g}}\cdot(\ 3.363634728\ )$$

	由 A 點以不同路徑時到達 B 所費時間
直線	$\sqrt{\dfrac{(\pi^2+4)a}{g}}$
擺線	$\pi\sqrt{\dfrac{a}{g}}$
圓弧	$\sqrt{\dfrac{(\pi^2+4)a}{8g}}\displaystyle\int_0^{\cos^{-1}(\frac{\pi^2-4}{\pi^2+4})}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\frac{\pi^2-4}{\pi^2+4}}}$
拋物線	$\dfrac{\pi a}{\sqrt{ag}}\displaystyle\int_0^1\frac{\sqrt{1+(16/\pi^2)(u-1)^2}}{\sqrt{4(2u-u^2)}}du$
正弦函數	$\sqrt{\dfrac{a}{g}}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1+\cos^2 u}}{\sqrt{\sin u}}du$

	時間近似值 $(a=g)$ 時
直線	3.724191778
擺線	3.141592654
圓弧	3.178908586
拋物線	3.276334991
正弦函數	3.363634728

由上表可以看出，擺線所耗時間最短，圓弧次之，拋物線第三，正弦函數第四，直線雖然距離最短，但卻是最慢的。

五、變分法的幾何意義與基本方程式

在初等微積分中我們都知道若單變數函數 $f(x)$ 的極值的求法，在物理、工程、幾何上，我們也是經常需要尋找極小(大)值，例如：最少時間、最小能量、最短距離、最小(大)面積……等。我們經常需要尋求下面線積分

$$I=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y,y')dx \text{ 的極小值，}$$

變分法的技巧就是在 $y(x)$ 的近傍加入一族群的參考函數(包含 $y(x)$)，加上一個參數 α，當使原積分式擴充為 $I=I(\alpha)$，如果 $y=y(x)$ 能夠使上式積分值發生極值，便可以用初等微積分的方式求解，這就是為何我們將 calculus of variation 稱為變分法的原因了，變分方法如下：

在推導過程中，需要用到微分，我們只針對一些「好」(well-behaved)的函數，在此，先假設

$f(x,y,y')$ 與 $y(x)\in C^2[x_1,x_2]$

註：C^2 表示連續兩次可微分，微分後亦為連續函數

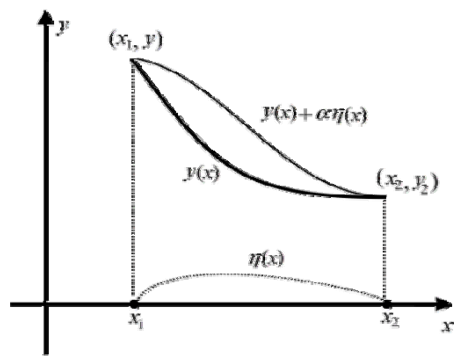
加入一新函數 $\eta(x)$，$\eta(x)\in C^2[x_1,x_2]$，且滿足邊界條件

$$\eta(x_1)=\eta(x_2)=0$$

令 $\hat{y}(x)=y(x)+\alpha\eta(x)$

$$\hat{y}'(x)=y'(x)+\alpha\eta'(x)$$

當 $\alpha=0$ 時，$\hat{y}(x)=y(x)$，如下圖



$$I(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2}f(x,\hat{y},\hat{y}')dx$$

$$=\int_{x_1}^{x_2}f(x,y(x)+\alpha\eta(x),y'(x)+\alpha\eta'(x))dx$$

由於 $y=y(x)$ 能夠使上式積分值發生極值，故

$$I'(\alpha)\Big|_{\alpha=0}=0$$

$$I'(\alpha)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\hat{y},\hat{y}')dx\text{ ，}$$

因為

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x,\hat{y},\hat{y}')=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\hat{y}}\frac{\partial\hat{y}}{\partial\alpha}+\frac{\partial f}{\partial\hat{y}'}\frac{\partial\hat{y}'}{\partial\alpha}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial\hat{y}}\eta(x)+\frac{\partial f}{\partial\hat{y}'}\eta'(x)$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\eta(x)+\frac{\partial f}{\partial y'}\eta'(x)\right)dx=0$$

積分第二式，以分部積分法展開，得

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\eta(x)\Bigg|_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)d\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)$$

$$=-\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)dx\text{ ，故原式}$$

$$\int_{x_1}^{x_2}\eta(x)\left(\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right)dx=0$$

因為 $\eta(x)$ 為可變化的函數，不會恆為 0
故得到

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)=0$$

上式就是著名的歐拉⑦(Euler)方程式。

直接以 Euler 方程式找極值有時並不方便，下面兩個引理對於特殊狀況求解比較方便

引理一
若 $f(x,y,y')=f(x,y')$ 則 Euler 方程式可改寫成

$$\frac{\partial f}{\partial y'}=C$$

引理二
若 $f(x,y,y')=f(y,y')$ 則 Euler 方程式可改寫成

$$\frac{\partial f}{\partial y'}y'-f=C$$

證明：因為

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}y'\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)y'+\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)y''$$

$$\frac{d}{dx}f=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{dy'}{dx}$$

$$=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}y''$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}-f\right)=y'\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)-\frac{\partial f}{\partial y}\right]-\frac{\partial f}{\partial x}$$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}y'-f\right)=0$ 得到

$$\frac{\partial f}{\partial y'}y'-f=C\quad\text{得證}$$

（$\frac{\partial f}{\partial x}=0$，中括弧內為 Euler 方程式）

六、應用 Euler 方程式求解

(1) Brachistochrone 問題
(Jacob Bernoulli 方法)
現在考慮的問題為時間的極值

$$t_{AB}=\int_{x_2}^{x_1}\frac{ds}{v}=\int_{x_2}^{x_1}\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}dx$$

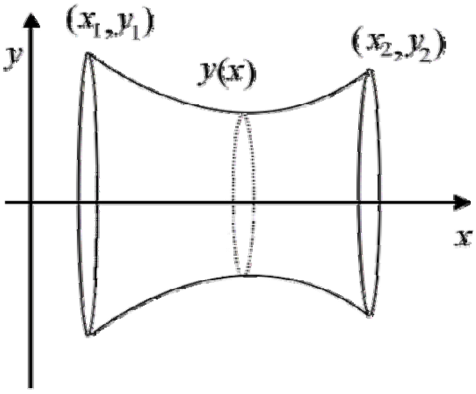
此處 $f=\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}$，由引理二，

$\frac{\partial f}{\partial y'}y'-f=C$，得到

$\frac{(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}\sqrt{2gy}}-\frac{\sqrt{1+(y')^2}}{\sqrt{2gy}}=C$，解出

$\left[1+(y')^2\right]2gy=C'$，這個結果與前面用光學的費馬定理所計算出的結果相同。

(2)最小曲面問題(minimal surface)
連接端點 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ 之平面上曲線 $y(x)$，若繞 x 軸旋轉所造成的曲面，若希望曲面表面積最小，$y(x)$ 會是什麼函數？



表面積函數為

$$A=\int_{x_1}^{x_2} 2\pi y ds$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}dx$$

利用引理二，$\frac{\partial f}{\partial y'}y'-f=c$

此處 $f=y\sqrt{1+(y')^2}$，極值曲線 $y(x)$ 滿足

$$\frac{x(y')^2}{\sqrt{1+(y')^2}}-y\sqrt{1+(y')^2}=c$$，

$cy'=\sqrt{y^2-c^2}$，解出

$$x=c\int\frac{dy}{\sqrt{y^2-c^2}}$$

$$=c\ln\left(\frac{y+\sqrt{y^2-c^2}}{c}\right)+d$$

$$e^{\frac{(x-d)}{c}}=\frac{y+\sqrt{y^2-c^2}}{c}$$

$y+\sqrt{y^2-c^2}=ce^{(x-d)/c}$，移項平方，得

$$y^2-c^2=c^2e^{2(x-d)/c}-2ce^{(x-d)/c}y+y^2$$

整理，$(2e^{(x-d)/c})y=c(e^{2(x-d)/c}+1)$

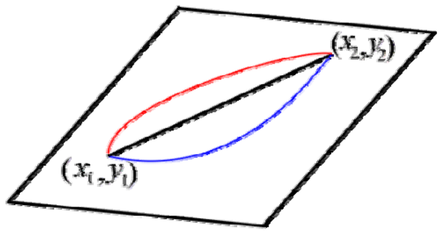
$y=c\frac{(e^{(x-d)/c}+e^{-(x-d)/c})}{2}$，為雙曲函數

$y=c\cosh(\frac{x-d}{c})$，這種曲線又稱為懸鏈線(catenary)⑧，懸鏈線是因為將質料均勻的繩子兩端綁在竹竿，繩子自然下垂所造成

而得名，最小曲面我們也可以彎曲鐵絲沾肥皂泡來觀察，因表面張力的原因，肥皂泡會自然尋找最小面積，出現了懸鏈線，對於懸鏈線的問題，也是個有趣的課題，在早期，以伽利略為代表，一直以為懸鏈線就是拋物線，而哥哥雅各也贊同伽利略的看法，在這個問題上，弟弟約翰就佔了上風，約翰曾在寫給友人的信中，嘲笑哥哥雅各，兄弟由爭吵進入水火不容，可在數學史的文章中找到⑨。最小曲面問題，在微分幾何中也是一個重要的課題。

(3)測地線(Geodesic)問題

a. 證明平面上兩點之間的最短距離：



考慮 $I=\int_{x_2}^{x_1} ds$

$$=\int_{x_2}^{x_1}\sqrt{1+(y')^2}dx$$

此處 $f=\sqrt{1+(y')^2}$，代入 Euler 方程式

$\frac{\partial f}{\partial y}=0$，$\frac{\partial f}{\partial y'}=\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$，因為

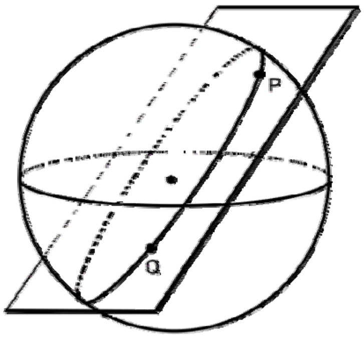
$\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=0$，所以

$\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}=C$，可解出

$y=ax+b$，再代入邊界條件就知道在平

面上連接兩點之直線造成最短距離。在平面上，兩點最短距離連線為直線，在曲面上，兩點最短的距離的連線，我們稱為測地線(geodesic)，例如我們在地面上以直線行走，其實走的是地球表面的一段弧，這段弧在平面穿過地球球心，這是地表最接近直線的軌跡⑩。

b.在球面上的測地線為大圓，就是說通過 P、Q 兩點的平面必過球心



考慮球面座標 $\begin{cases} x = a\sin\phi\cos\theta \\ y = a\sin\phi\sin\theta \\ z = a\cos\phi \end{cases}$

先將 θ 視為 ϕ 的函數 $\theta=\theta(\phi)$ ，則

$$\begin{cases} dx = -a\cos\phi\sin\theta d\theta \\ dy = \ \ a\cos\phi\cos\theta d\theta \\ dz = -a\sin\phi \end{cases}$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2}$$

$=\sqrt{1+(d\theta/d\phi)^2\sin^2\phi}d\phi$ ，考慮積分

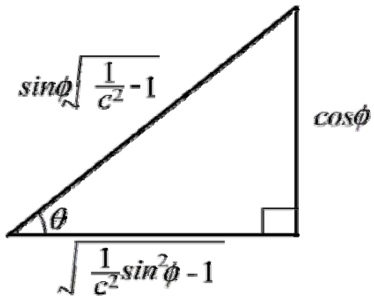
$I = a\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+(d\theta/d\phi)^2\sin^2\phi}d\phi$ ，代入 Euler 方程式，利用引理一，得到

$\dfrac{\theta'\sin^2\phi}{\sqrt{1+(\theta')^2\sin^2\phi}} = c$ ，整理後成為

$$\frac{d\theta}{d\phi} = \frac{c}{\sin\phi\sqrt{\sin^2\phi - c^2}}$$

$=\dfrac{1}{\sin\phi\sqrt{(1/c^2)\sin^2\phi-1}}$ ，變數分離方程式解出

$$\theta = -\tan^{-1}\left(\frac{\cos\phi}{\sqrt{(1/c^2)\sin^2\phi-1}}\right)+d$$



將 θ 表為反正弦計算較為方便

$$\theta = -\sin^{-1}\left(\frac{\cos\phi}{\sin\phi\sqrt{(1/c^2)-1}}\right)+d$$

$\sin(d-\theta) = \dfrac{\cos\phi}{\sin\phi\sqrt{(1/c^2)-1}}$ ，以複角公式展開

$$\sin d\cos\theta\sin\phi - \sin\theta\sin\phi\cos d = \left(\frac{\cos\phi}{\sqrt{(1/c^2)-1}}\right)$$

$$\frac{\sin d}{a}x - \frac{\cos d}{a}y = \frac{1}{\sqrt{(1/c^2)-1}}\left(\frac{z}{a}\right)$$

godesic 方程式可整理為

$$z = \left(\sin d\sqrt{(1/c^2)-1}\right)x - \left(\cos d\sqrt{(1/c^2)-1}\right)y$$

討論：

(a) $c=0$ 時， $\phi=0$ ，
為通過南北極的大圓

(b) $c=1$ 時， $z=0$ ，
為通過赤道的大圓

(c) $0<|c|<1$ ，為上所求出的通式，也是通過 $(0,0,0)$ 的平面，如此證明出了球面的 godesic 為大圓。

七、結論

由十七世紀最速降線的研究到二十世紀廣義相對論的發表，都離開不了變分學。牛頓力學認為的地球是由引力的作用沿著橢圓軌道行走，而由廣義相對論的觀點則是認為地球而是沿著彎曲的空間中最

接近直線，稱為測地線的軌跡運動，由於太陽質量的引起的空間-時間彎曲，在四度空間(x ,y, z, t)中地球以直線運行，在三維空間的角度看起來是橢圓，這似乎難以理解，不過我們想想空中的飛機航行在崎嶇的山路，飛機的影子在平面上是高高低低的路徑，可是在三度空間來看，飛機可是沿著直線飛行呢!這革命性的理論以當時的柏努利、費馬是不可能知道的，不過當時解最速降線時使用到光學的費馬定理，已經用到了「光沿著測地線走」的觀念。

柏努利兄弟雖然處處不合，但是有一個共同點，都發現了歐拉在數學上擁有不凡的的天份，他們先後都做過歐拉的老師，歐拉也沒有讓柏努利們失望，他發表論文的速度令人驚歎，幾乎所有的數學都有他的研究足跡，甚至他晚年失明後論文的發表還有增無減，對於變分法，歐拉也由於柏努利的鼓勵，致力研究變分理論，將解析幾何提升到微分幾何的範疇，對於後來的古典力學，甚至近代物理都有重大的貢獻。

八、參考文獻

[1]Larsen Hostetler *Calculus Houghton Nifflin*
[2] Herbert Goldstein *Classical Mechanic 2nd edition*
[3] Courant Hilbert *Methods of Mathematical Physics VolumeII*
[4]Dirk J. Struik *Lectures on classical DifferentialGeometry1961,addison-wesley mathematics series*
[5]希爾伯特的 23 個數學問題 葛雷著 天下文化
[6]毛起來說 e 毛爾著 天下文化
[7]數學和數學家的故事 李學數著 凡異出版社

九、注釋

①約翰·柏努利(1667-1748)，瑞士數學家，性格愛恨強烈分明，萊布尼茲和歐拉是他心中的神，牛頓和他的哥哥雅各他卻痛恨無比。

②雅各·柏努利(1654-1705)，瑞士數學家，最大的成就在機率論方面的研究。

③當時公開問題的答案，共有五人答對，萊布尼茲、牛頓、羅必達、雅各和約翰自己，其中牛頓知道約翰不喜歡他，故寄去的答案沒有署名，約翰一看就知道是牛頓，他說「獅子的出現看腳印就知道」。

④斯乃爾(1580-1626)，荷蘭物理學家，精於實驗及測量，他曾於 1617 年精確的測量出地球的大小，不過他發現光的折射定律，僅止於物理的實驗，並沒有數學的推導。

⑤tauto 為希臘文，「相同」的意思，chrone 為「時間」。

⑥惠更斯(1629-1695) 荷蘭物理學家及數學家，年輕時他就發現懸鏈線與拋物線的區別，也是機率論的創始人。

⑦歐拉，瑞士人，父親保羅是牧師，父親原本希望小歐拉繼承他的職業也做個牧師，雅各說服保羅改變心意，而約翰也看出小歐拉的數學天份，私下教小歐拉數學，歐拉 1722 年從巴塞爾大學畢業後，直到七十六歲去世，對數學的創作源源不絕。

⑧萊布尼茲於1690 年於＜*Acta eruditorum*＞中提到…….我著手解決懸鏈線問題，這是我至今還沒試是過的，我很愉悅的用我的鑰匙(微分學)，打開他的秘密。他是最早解開懸鏈線問題的人，但不公佈解答，讓其他研究的人多些時間。

⑨見[6]p. 197，雖然這個問題雖然雅各落後了他的弟弟約翰，但雅各事後參考約翰的解法，證明了懸鏈線是重心最低的一種，顯示大自然創造形狀時，會盡量降低位能，有更大的貢獻。

⑩愛因斯坦(1879−1955)，猶太裔德國人，他見到一隻小蟲在大球上爬行，他說「這隻小蟲以為牠在平面上直線行走，而我比較幸運，我看到牠走的是一段弧」。