

精熟學習

1. 設一物體沿一直線運動, 已知時間 t 與該物體運動之距離 s 之關係為 $s = t^2 - t$, 則

在 $t = 2$ 的瞬間速度為(瞬間速度變化)

(A) 5 (B) 3 (C) 1 (D) 0

SOL: 距離與時間關係為

$s = t^2 - t$, 對 t 微分, 得

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d(t^2 - t)}{dt} = 2t - 1, \text{ 令 } t = 2 \text{ 表示在 } t = 2 \text{ 時之瞬間速度}$$

$$\frac{ds}{dt} = 4 - 1 = 3$$

故選(B)

2. 曲線 $y = \sqrt{x}$ 在 $x = \frac{1}{4}$ 的瞬間變化率為 (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{1}{4}$

(瞬間變化率)

SOL:

$y = \sqrt{x}$, 對 x 微分, 得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(\sqrt{x})}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ 令 } x = \frac{1}{4} \text{ 表示在 } x = \frac{1}{4} \text{ 時之瞬間變化率}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{1/4}} = 1$$

故選(A)

3. 假設持續以 $3m^3 / \text{min}$ 注水入一半徑為 $2m$, 高為 $10m$ 圓柱形水塔, 如圖, 求在水深 $h = 4$ 時, 水上升在速率為? (瞬間變化率應用一)

SOL:

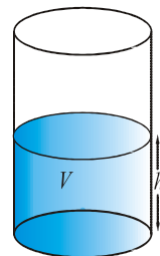
(1) 建立函數關係式, V 表水容積, h 表水深

$$V = \pi \cdot 2^2 \cdot h = 4\pi h$$

(2) 依照題意條件

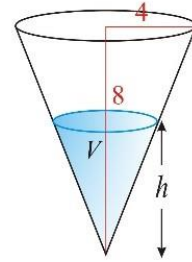
$$\frac{dV}{dt} = 3, \quad h = 4, \quad \frac{dh}{dt} = ?$$

(3) 函數關係式對 t 微分



$$\frac{dV}{dt} = 4\pi \frac{dh}{dt} \cdot \text{代入} \frac{dV}{dt} = 3 \cdot \text{得} \frac{dh}{dt} = \frac{3}{4\pi}$$

4. 假設持續以 $8\text{m}^3/\text{min}$ 注水入一頂端半徑為 4m ，高為 8m 圓錐形水塔，如圖，求在水深 $h = 4$ 時，水上升在速率為 (瞬間變化率應用二)



- (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) π (C) 2π (D) $\frac{2}{\pi}$

SOL:

- (1) 建立函數關係式， V 表水容積， h 表水深

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{\pi}{12}h^3$$

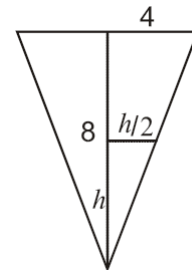
- (2) 依照題意條件

$$\frac{dV}{dt} = 8 \cdot h = 4 \cdot \frac{dh}{dt} = ?$$

- (3) 函數關係式對 t 微分

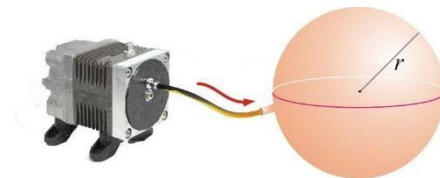
$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} 3h^2 \frac{dh}{dt} \Rightarrow 8 = \frac{\pi}{12} \cdot 3 \cdot 16 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2}{\pi}$$



故選(D)

5. 一空氣幫浦每分鐘 9 立方英吋的速率注空氣進入一個球型氣球，如右圖，當氣球半徑為 3 英吋時，半徑的變化率。



- (A) $\frac{1}{4\pi}$ (B) $\frac{4}{\pi}$ (C) $\frac{5}{4\pi}$ (D) $\frac{9}{\pi}$ (瞬間變化率應用三)

SOL:

- (1) 建立函數關係式， V 表氣球體積， r 表半徑

$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$

- (2) 依照題意條件

$$\frac{dV}{dt} = 9 \cdot r = 3 \cdot \text{欲求} \frac{dr}{dt} = ?$$

- (3) 函數關係式對 t 微分