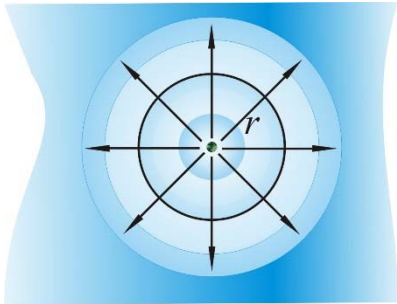


第一週	主題一:數 主題二：函數 主題三：一元二次方程式 主題四：直線方程式
第二週	主題五：極限
第三週	主題六：連續性
第四週	主題七：漸近線
第五週	主題八：導函數
第六週	主題九：指數與對數
第七週	主題十：指數與對數的微分
第八週	主題十一：微分技巧延伸
第九週	主題十二：三角函數(一)
第十週	主題十三：三角函數(二)
第十一週	主題十四：三角函數的微分
第十二週	主題十五：相對極大與極小
第十三週	主題十六：絕對極值
第十四週	主題十七：近似值
第十五週	主題十八：相關變律
第十六週	主題十九：羅必達法則
第十七週	主題二十：不定積分
第十八週	主題二十一：不定積分的其他技巧

主題十五： 相關變律	PART 1：變率	
		變率是針對時間的過程檢視變數的變化，假設時間由 t 到 $t + \Delta t$，變數 f 則由 $f(t)$ 改變為 $f(t + \Delta t)$，其變率為 $\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{(t + \Delta t) - t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ ，當 $\Delta t \rightarrow 0$ 時我們可以發現 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$ 恰為微分的定義 $f'(t)$，但因為考慮不只一個變數，在本單元微分採用萊布尼茲符號 $\frac{df}{dt}$ 較為方便。
	PART 2：相關變率	
	兩個變數之間存在函數的關係，其中一變數發生改變，牽動另一變數也跟著變化，如將水倒入茶杯，水的容積會影響茶杯水位的高低，但可能變化很微小，也可能很劇烈，本單元學習的目的在於研究兩變數相互影響的程度。	
	PART 3：相關變率的核心	
	研究相關變率的思考核心在於建立模型，就是將變數之間的關係以方程式的方式寫成等式，建立的模型就是函數關係，有了函數關係，相關變率問題就成為簡單的微分與代數問題了。	
	PART 4：相關變率的解題步驟	
	(1) 建立模型: 將變數之間的關係以方程式表出。 (2) 兩邊同時對 t 微分，過程中可能需要使用乘(除)法的微分公式或連鎖律，形成微分方程式。 (3) 依照題目的已知條件，代入(2)之微分方程式即可解題。	
	PART 5：相關變率的學習方法	
	學好本單元的不二法門在於多觀摩與練習例題，在多練習例題中熟練解題步驟，最重要的還是同學學習”(1)建模的能力”、”(2)熟練微分技巧”	
	PART 6：例題練習	
	例題: (水波面積) 一個石頭投入一個水池中造成圓形漣漪水波，如圖 1，若水波的半徑為 r，每秒增加率固定為 1，問當水波半徑為 4 時，總面積 A 將如何改變？  圖 1. 一顆石頭投入水池造成漣漪 SOL: (1)建立模型: 設水波面積 A，半徑 r，$A = \pi r^2$ (2)兩邊同時對 t 微分，$\frac{dA}{dt} = \pi \cdot 2r \frac{dr}{dt}$	

(3)依照題目得條件， $\frac{dr}{dt}=1$ ， $r=4$ ，求 $\frac{dA}{dt}=?$

$$\frac{dA}{dt} = \pi \cdot 2 \cdot 4 \cdot 1 = 8\pi$$

【思考】

水波半徑為定速 1 增加，水波面積大小並不會以定速增大，以本題數據而言，面積增長的速率很快，當 $r=4$ 時，面積增長的速率約以 $8\pi \div 25.12$ 的速率增大。

例題: (氣球體積)

一空氣幫浦每分鐘 4.5 立方英吋的速率注空氣進入一個球型氣球，如圖 2，當氣球半徑為 2 英吋時，半徑的變化率。

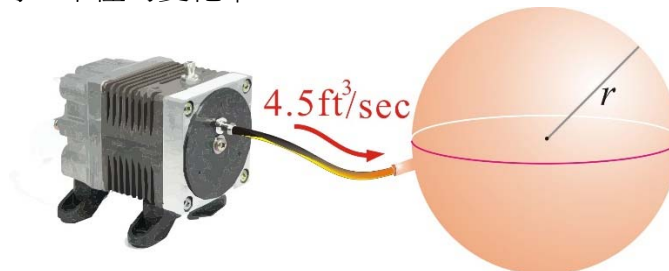


圖 2. 幫浦將空氣注入個氣球

SOL:

(1)建立模型: 氣球體積 V ，氣球半徑 r ，則 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

(2)兩邊同時對 t 微分， $\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt}$

(3)依照題目得條件， $\frac{dV}{dt} = 4.5$ ， $r = 2$ ，求 $\frac{dr}{dt} = ?$

$$4.5 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3 \cdot 4 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{9}{32\pi} = \frac{dr}{dt}$$

【思考】

我們以每秒固定的空氣量注入氣球，氣球半徑的變化並非固定，以本例題數據來說以 $4.5 \text{ ft}^3 / \text{sec}$ 的速率注空氣入氣球，當半徑為 2 時，半徑卻以 $\frac{9}{32\pi} \div 0.09$ 的微小速率成長。

例題: (梯子側滑)

一長 10m 的梯子靠在牆上，如下圖所示，若將梯底以 0.2m/sec 的速度拉離牆壁，試求梯底和牆腳相距 6m 時，梯子的上端沿牆壁下滑的速率速率。

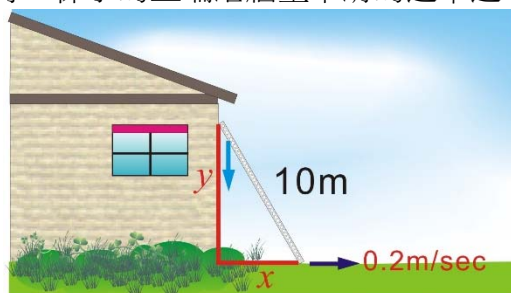


圖 3. 梯子側滑問題

SOL:

(1)建立模型：取牆腳為原點座標，如上圖所示 $x^2 + y^2 = 100$ ， $y = \sqrt{100 - x^2}$

(2)兩邊同時對 t 微分， $\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{100 - x^2}} \frac{dx}{dt}$

(3)依照題目得條件， $\frac{dx}{dt} = 0.2 \text{ m/sec}$ ， $x = 6$ ，求 $\frac{dy}{dt} = ?$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \frac{-2 \cdot 6}{\sqrt{100-6^2}} \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-6}{8} (0.2) = -\frac{3}{20} \text{ m/sec}$$

梯子的上端以 $-\frac{3}{20}$ m/sec 下滑(這裡負號表示向下)

【思考】

梯子下緣以固定速率側滑，梯子上緣下滑速率並非固定，以本例題數據來說梯子下緣以 0.2 m/sec 的速率向右侧滑，當梯子下緣距牆角 6m 時，梯子上緣以 $-\frac{3}{20}$ m/sec $\doteq$ 0.15m/sec 的較小速率下滑。

例題: (棒球場距離)

棒球場地每個壘包距離 90 英尺，一位跑者以每秒 20 英尺由 2 壘跑向 3 壘， s 表示本壘捕手到跑者之距離，如圖 4，為當跑者距離 3 壘 30 英尺時，捕手到跑者之距離變化率為多少？



圖 4. 棒球場跑壘問題

SOL:

(1)建立模型：捕手到跑者之距離 s ，2 壘到 3 壘距離 x ， $s = \sqrt{90^2 + x^2}$

(2)兩邊同時對 t 微分， $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{90^2 + x^2}} \frac{dx}{dt}$

(3)依照題目得條件， $\frac{dx}{dt} = 20 \text{ ft/sec}$ ， $x = 30$ ，求 $\frac{ds}{dt} = ?$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \frac{2 \cdot 30}{\sqrt{90^2 + 30^2}} \cdot (-20) = -\frac{20}{\sqrt{10}} = -2\sqrt{10} \text{ ft/sec}$$

捕手到跑者之距離以 $2\sqrt{10} \text{ ft/sec}$ 靠近

例題: (注水問題)

一個表面為 12 公尺×3 公尺長方形，底為高 3 公尺等腰三角形之水槽，如圖 5，若以每分鐘 2 立方公尺之等速率注水，當水深 1 公尺時，水面上升的速率為多少？

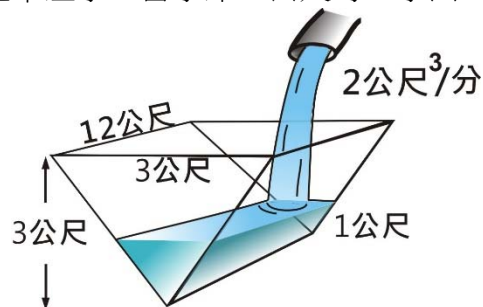


圖 5. 水槽形狀

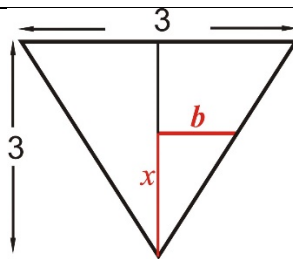


圖 6. 水槽斷面分析以建立模型

SOL:

(1)建立模型：假設水深 x 公尺，根據圖 6 之相似三角形 $\frac{1.5}{3} = \frac{b}{x} \Rightarrow b = \frac{x}{2}$ (三角形底之半)

$$\text{三角形面積} = \frac{1}{2} \text{底} \cdot \text{高} = \frac{1}{2} x \cdot x = \frac{x^2}{2}$$

$$\text{水的容積 } V = \frac{x^2}{2} \cdot 12 = 6x^2$$

(2)兩邊同時對 t 微分， $\frac{dV}{dt} = 12x \frac{dx}{dt}$

(3)依照題目得條件， $\frac{dV}{dt} = 2\text{m}^3/\text{min}$ ， $x = 1\text{m}$ ，求 $\frac{dx}{dt} = ?$

$$2 = 12 \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{6} \text{m/min}$$

【思考】

以固定速率每分鐘 2 立方公尺注水入槽，水上升高度的速率非固定，當水深為 1 公尺時，水位以 $\frac{1}{6} \doteq 0.17$ 公尺/分鐘的微小速率上升。

例題: (引擎活塞問題)

一引擎之曲柄 6 公分，曲柄以逆時針旋轉轉動帶動 14 公分的曲軸並牽動活塞左右移動，如圖 7，若以曲柄以每分 1000 轉的定速轉動(100 RPM)，當 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 時，活塞移動的速率為多少？

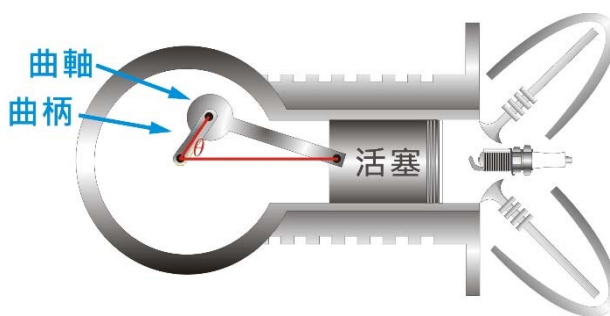


圖 7. 引擎曲軸帶動活塞

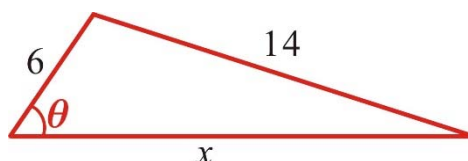


圖 8. 引擎曲軸帶動活塞放大圖

SOL:

(1)建立模型：曲柄以 1000 圈/分的定速轉動，一圈 2π 弧度，故 $\frac{d\theta}{dt} = 1000 \cdot (2\pi) = 2000\pi$ ，根據圖 8，利用餘弦定律 $14^2 = x^2 + 6^2 - 2 \cdot x \cdot 6 \cdot \cos\theta$

(2)等號兩邊同時對 t 微分， $0 = 2x \frac{dx}{dt} - 12 \cdot \frac{dx}{dt} \cos \theta + 12x \cdot \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \dots (*)$

(3)依照題目得條件， $\frac{d\theta}{dt} = 2000\pi$ ， $\theta = \frac{\pi}{3}$ ，求 $\frac{dx}{dt} = ?$

在(*)中有 x 需要先求出，再代餘弦定律

$$14^2 = x^2 + 6^2 - 2 \cdot x \cdot 6 \cos \theta \Rightarrow 14^2 = x^2 + 6^2 - 6x \Rightarrow x^2 - 6x - 160 = 0$$

$$\Rightarrow (x-16)(x+10) = 0$$

$$\Rightarrow x = 16 \text{ 或 } x = -10 \text{ (不合)}$$

將已知所有條件代入(*)，得 $0 = 32 \frac{dx}{dt} - 6 \cdot \frac{dx}{dt} + 12 \cdot 16 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d\theta}{dt}$ ，整理

$$26 \frac{dx}{dt} + 96\sqrt{3} \cdot 2000\pi = 0, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{-96\sqrt{3} \cdot 2000\pi}{26} \doteq 40181 \text{ 公分/分鐘}$$

【思考】

曲柄以固定速率每分鐘 1000 轉的速率轉動，活塞會以非固定速率移動，當曲柄與活塞移動方向夾 60° 時，活塞約以每分 40181 公分的高速率移動。

例題: (雪球融化問題)

已知雪球融化的速率與雪球之表面積成比例，

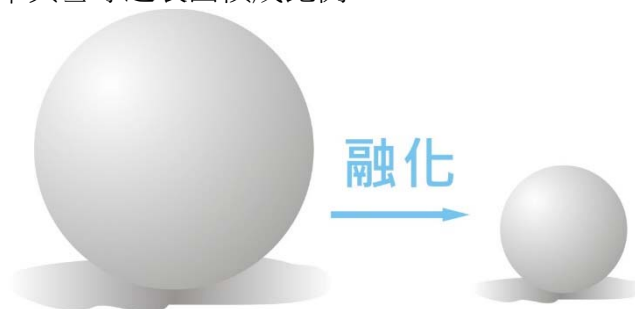


圖 9. 雪球融化

(a)證明雪球之半徑縮減變化率為定數

(b)有一顆雪球經過一小時體積融化到原來的 $\frac{8}{27}$ ，問這個雪球多少時間會全部融化

SOL:

(a)設雪球半徑 r ，雪球體積 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ，兩邊對 t 微分， $\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi 3r^2 \frac{dr}{dt}$

$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ ，依照題意，雪球融化的速率與雪球之表面積成比例，也就是體積的變

化 $\frac{dV}{dt} = K \cdot 4\pi r^2$ (K 為常數)，得到 $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{K}$ ，得證。

(b) 體積融化到原來的 $\frac{8}{27}$ ，表示半徑縮到原來的 $\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \frac{2}{3}$ ，由於雪球融化半徑的定速縮減，一小時融掉 $\frac{1}{3}$ ，3 小時應可全部融化。

例題: (相對移動問題)

在早上 8 點，B 船位於 A 船西方 120 公里處，A 船以每小時 20 公里的速度往北移動，而 B 船以每小時 25 公里的速度往東移動，求早上 10 點時，兩船距離之瞬間變化率？

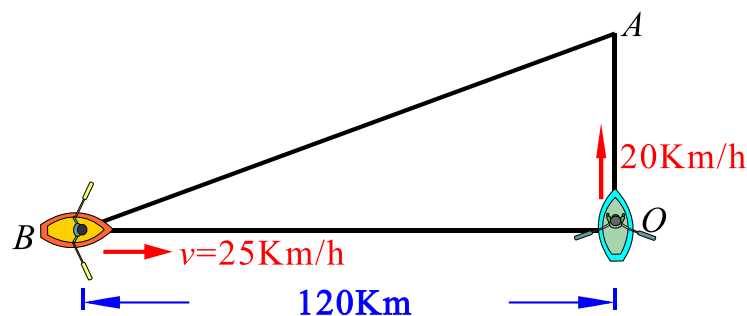


圖 10. 划船相對移動

SOL:

(1) 建立模型：假設經歷 t 小時後， $\overline{OB} = 120 - 25t$ ， $\overline{OA} = 20t$ ， A, B 船之距離

$$\overline{AB} = D = \sqrt{(120 - 25t)^2 + (20t)^2}$$

(2) 兩邊同時對 t 微分， $\frac{dD}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(120 - 25t)^2 + (20t)^2}} [2(120 - 25t)(-25) + 2(20t)20]$

(3) 依照題目得條件，8 點到 10 點表示 $t = 2$ ，

$$\frac{dD}{dt} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{(70)^2 + (40)^2}} [2(70)(-25) + 2(40)20] = \frac{1}{20} \frac{1}{\sqrt{65}} [-3500 + 1600] = -\frac{95}{\sqrt{65}}$$

【思考】

A 船定速向北移動， B 船定速向東移動，兩船接近的速率並非固定，當兩小時後兩船距離之瞬間變化率為 $-\frac{95}{\sqrt{65}} \doteq -11.79$ 表示兩船以每小時 11.79 之速率靠近，若 t 值較

大， $\frac{dD}{dt}$ 值變正，表示兩船在相互遠離。