精熟學習

1. 試利用微分公式 $df \doteq \Delta f$ 求 $\sqrt{100.01}$ 之近似值 (微分求近似值)

   (A)10.003 (B) 10.02 (C) 10.05 (D) 10.005

SOL:

(1)設 $f(x)=\sqrt{x}$ ， $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(2)微分公式 $f(x+\Delta x)\doteq f(x)+f'(x)\Delta x$

(3)令 $x=100$ ，$\Delta x=0.01$ $f(100+0.01)\doteq f(100)+f'(100)0.01$

$\sqrt{100.01}\doteq 10+\dfrac{1}{20}0.01=10.005$

故選(D)

----

2. 微分估計近似值之敘述何者不真(微分求近似值觀念)

   (A) 利用 $df \doteq \Delta f$ 觀念求近似值

   (B) $|\Delta x|$ 愈接近 0 估計值愈準確

   (C) 微分估計近似值是利用割線逼近切線斜率的觀念

   (D) 微分估計近似值公式為 $f(x+\Delta x)\doteq f(x)-f'(x)\cdot\Delta x$

SOL:

   (A) 利用 $df \doteq \Delta f$ 觀念求近似值….(正確)

   (B) $|\Delta x|$ 愈接近 0 估計值愈準確....(正確)

   (C) 微分估計近似值是利用割線逼近切線斜率的觀念....(正確)

   (D) 微分估計近似值公式為 $f(x+\Delta x)\doteq f(x)-f'(x)\cdot\Delta x$ ....(不正確)

正確的微分估計近似值公式為 $f(x+\Delta x)\doteq f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$

故選(D)

----

3. 試求 $f(x)=e^x$ 在 $x=0$ 的之馬克勞林級數展開式(馬克勞林級數)

SOL: 馬克勞林級數展開式為

$$f(x)\doteq f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$$

$f(x)=e^x \quad\Rightarrow f(0)=e^0=1$

$f'(x)=e^x \quad\Rightarrow f'(0)=e^0=1$

$f''(x)=e^x \quad\Rightarrow f''(0)=e^0=1$

$f'''(x)=e^x \quad\Rightarrow f'''(0)=e^0=1$

$$e^x \doteq 1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots$$

---

4. 試求 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 的之馬克勞林級數展開式(馬克勞林級數)

SOL: 馬克勞林級數展開式為

$$f(x)\doteq f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\cdots$$

$f(x)=\sin x \quad \Rightarrow f(0)=\sin(0)=0$

$f'(x)=\cos x \quad \Rightarrow f'(0)=\cos(0)=1$

$f''(x)=-\sin x \quad \Rightarrow f''(0)=-\sin(0)=0$

$f'''(x)=-\cos x \quad \Rightarrow f'''(0)=-\cos(0)=-1$

$f^{(4)}(x)=\sin x \quad \Rightarrow f^{(4)}(0)=\sin(0)=0$

$$\sin x \doteq 0+\frac{1}{1!}x+\frac{0}{2!}x^2+\frac{-1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\cdots=\frac{1}{1!}x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$$

---

5. 試求 $f(x)=\ln(x+1)$ 在 $x=0$ 的之馬克勞林級數展開式(馬克勞林級數)

SOL: $f(x)$ 在 $x=0$ 之馬克勞林級數展開式

$$f(x)\doteq f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\cdots$$

$f(x)=\ln(x+1) \quad \Rightarrow f(0)=\ln(1)=0$

$f'(x)=\frac{1}{x+1} \quad \Rightarrow f'(0)=\frac{1}{1}=1$

$f''(x)=-\frac{1}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow f''(0)=-\frac{1}{1}=-1$

$f'''(x)=\frac{2}{(x+1)^3} \quad \Rightarrow f'''(0)=\frac{2}{1}=2$

$f^{(4)}(x)=\frac{-3!}{(x+1)^4} \quad \Rightarrow f^{(4)}(0)=\frac{-3!}{1}=-3!$

$$\ln(x+1)\doteq \frac{1}{1!}x+\frac{-1}{2!}x^2+\frac{2}{3!}x^3+\frac{-3!}{4!}x^4+\cdots$$

$$\ln(x+1)\doteq x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots$$

6.利用微分公式 $df \doteq \Delta f$ 求 $\sqrt[3]{1003}$ 之近似值為(微分求近似值)

(A)10.099 (B)10.01 (C) 10.085 (D) 10.02

SOL:

(1)設 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ， $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

(2)微分公式 $f(x+\Delta x)\doteq f(x)+f'(x)\Delta x$

(3)令 $x=1000$ ，$\Delta x=3$ $f(1000+3)\doteq f(1000)+f'(1000)\cdot 3$

$\sqrt[3]{1003}\doteq 10+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{1000^2}}3=10.01$

故選(B)

7.利用牛頓求根法估計 $\sqrt{3}\ (x_0=2)$ 計算至 x_2 (牛頓求根法)

SOL:

(1) $x=\sqrt{3} \Rightarrow x^2=3 \Rightarrow x^2-3=0$

(2) 牛頓求根法之遞迴公式為

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Rightarrow x_{n+1}=x_n-\frac{x_n^2-3}{2x_n} \Rightarrow x_{n+1}=\frac{x_n^2+3}{2x_n}$$

(3)依序將數字代入遞迴公式

$$x_1=\frac{2^2+3}{4}=\frac{7}{4}\doteq 1.75$$

$$x_2=\frac{1.75^2+3}{2\cdot(1.75)}=\frac{6.0625}{3.5}\doteq 1.732$$