第一週	主題一:數 主題二：函數 主題三：一元二次方程式 主題四：直線方程式
第二週	主題五：極限
第三週	主題六：連續性
第四週	主題七：漸近線
第五週	主題八：導函數
第六週	主題九：指數與對數
第七週	主題十：指數與對數的微分
第八週	主題十一：微分技巧延伸
第九週	主題十二：三角函數(一)
第十週	主題十三：三角函數(二)
第十一週	主題十四：三角函數的微分
第十二週	主題十五：相對極大與極小
第十三週	主題十六：絕對極值
第十四週	主題十七：近似值
第十五週	主題十八：相關變律
第十六週	主題十九 ： 羅必達法則
第十七週	主題二十：不定積分
第十八週	主題二十一：不定積分的其他技巧

第十四週 近似值與泰勒展開式

主題十七：近似值

PART 1：微分的定義

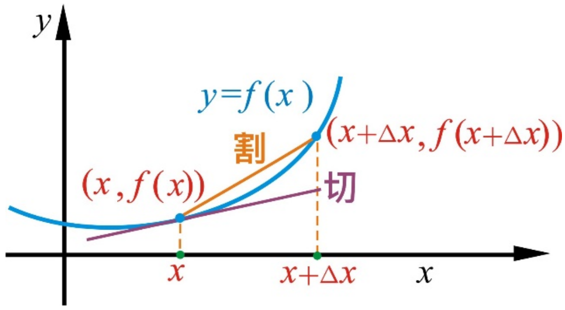


圖 1.切線以割線逼近

PART 2：近似值公式

J01

當 Δx 很小，割線斜率 ≐ 切線斜率

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \doteq f'(x)$$

$$f(x+\Delta x) \doteq f(x)+f'(x)\Delta x$$

Δx 愈小，微分估計值愈準確

例題(開平方根)

試以微分公式估計 $\sqrt{144.01}$ 之近似值

SOL:

(1)設 $f(x)=\sqrt{x}$ ， $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(2)微分公式 $f(x+\Delta x) \doteq f(x)+f'(x)\Delta x$

(3)令 $x=144$ ， $\Delta x=0.01$

$$f(144+0.01) \doteq f(144)+f'(144)(0.01)$$

$$f(144.01) \doteq 12+\frac{1}{24}(0.01)=12.000416$$

例題(開立方根)

試以微分公式估計 $\sqrt[3]{26.98}$ 之近似值

SOL:

(1)設 $f(x)=\sqrt[3]{x}$ ， $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

(2)微分公式 $f(x+\Delta x) \doteq f(x)+f'(x)\Delta x$

(3)令 $x=27$ ， $\Delta x=-0.02$

$$f(27-0.02) \doteq f(27)+f'(27)(-0.02)$$

$$f(26.98) \doteq 3-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9}(0.02)=3-0.00074=2.99926$$

例題(三角函數)

試以微分公式估計 $\sin 31^\circ$ 之近似值

SOL:

(1)設 $f(x)=\sin x$ ， $f'(x)=\cos x$

(2)微分公式 $f(x+\Delta x) \doteq f(x)+f'(x)\Delta x$

(3)三角函數中的度要換成弧度才能計算 $31^\circ=30^\circ+1^\circ=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{180}$

令 $x=\dfrac{\pi}{6}$，$\Delta x=\dfrac{\pi}{180}$

$$f\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{180}\right)\doteq f\left(\frac{\pi}{6}\right)+f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{\pi}{180}\right)$$

$$f(31^\circ)\doteq \sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\left(\frac{\pi}{180}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\doteq 0.5+0.0151$$

PART 3：微分與導函數

微分求近似值的觀念在於利用 $\Delta f\doteq df$ 的觀念，在本單元對 f 微分要使用萊布尼茲符號 $\dfrac{df}{dx}$ 取代導函數 $f'(x)$ 較為方便，例如 $f(x)=x^2+2x \quad \Rightarrow \dfrac{df}{dx}=2x+2$

$\Rightarrow df=(2x+2)dx \quad \Rightarrow \Delta f\doteq(2x+2)\Delta x$

例題(球體積誤差)

假設球的半徑10公分，其誤差 ± 0.1 公分，試求球體積的可能誤差

SOL:

(1) 球體積 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$

(2)兩邊對 r 微分得 $\dfrac{dV}{dr}=\dfrac{4}{3}\pi 3r^2 \Rightarrow \quad dV=4\pi r^2 dr \Rightarrow \quad \Delta V\doteq 4\pi r^2\Delta r$

(3)代入題目條件: $r=10$，$\Delta r=\pm 0.1$，得到 $\Rightarrow \quad \Delta V\doteq 4\pi(100)(\pm 0.1)$

例題(計算 dy 與 Δy)

若 $y=x^2+2x$，當 $x=3$，$\Delta x=0.1$ 時求 Δy 與 dy

SOL:

(1) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\left[(x+\Delta x)^2+2(x+\Delta x)\right]-\left[x^2+2x\right]$

$=\left[(3+0.1)^2+2(3+0.1)\right]-\left[3^2+6\right]=\left[(3.1)^2+2(3.1)\right]-\left[15\right]=0.81$

(2) $dy=(2x+2)dx\doteq 8\Delta x=0.8$

PART 3：牛頓求根法

J17

若 $f(\alpha)=0$，表示 α 表示方程式 $f(x)=0$ 之根，若以幾何的角度來說明，$x=\alpha$ 為 $y=f(x)$ 圖形與 x 軸的交點，如圖 2

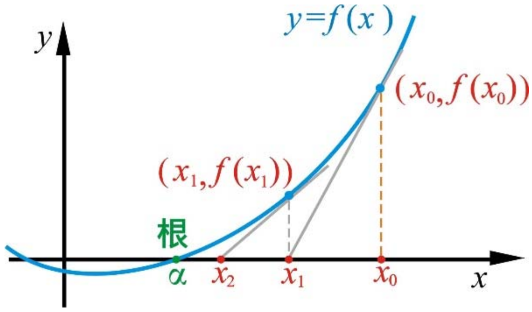


圖 2. 牛頓求根法

求方程式 $f(x)=0$ 根的技巧有許多種，若 $f(x)$ 為可微分函數，牛頓方法是一種很優良的技巧，給定一個初始點，採遞迴方式計算，很快的收斂到根的位置。

PART 4：牛頓求根法步驟

(1)定一個適當的初始點 x_0，求出 $(x_0, f(x_0))$

(2)求出 $y=f(x)$ 過 $(x_0, f(x_0))$ 之切線方程式: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$

(3)此直線方程式與 x 軸的交點為 x_1，$-f(x_0)=f'(x_0)(x_1-x_0)$，解 x_1 得

$x_1=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，依此方法持續計算 $x_2,x_3,x_4,x_5\ldots$持續向根 α 接近

(4)牛頓求根法遞迴公式 $x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

例題(求近似值)

利用牛頓求根法求 $\sqrt{3}$ 至小數第 3 位

SOL: $x=\sqrt{3} \quad\Rightarrow\quad x^2=3 \quad\Rightarrow\quad f(x)=x^2-3$， $\quad\Rightarrow\quad f'(x)=2x$

(1)令 $x_0=1.7 \quad\Rightarrow\quad x_1=1.7-\dfrac{2.25-3}{3}=1.7-\dfrac{-0.11}{3.4}=1.73235$

(1)令 $x_1=1.73235 \quad\Rightarrow\quad x_2=1.73235-\dfrac{2.25-3}{3}=1.73235-\dfrac{0.001036}{3.4647}=1.732050$

$\sqrt{3}\doteq 1.732$

例題(求根) 【95 輔仁金融所】

以 $x=2$ 為起始值，使用牛頓法求 $x^3-2x-5=0$ 之根，求兩次迭代即可

SOL 令 $f(x)=x^3-2x-5$， $f'(x)=3x^2-2$

$x_{n+1}=x_n-\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

牛頓法 $x_1=2$， $x_2=2-\dfrac{f(2)}{f'(2)}=2-\dfrac{(-1)}{10}=2.1$，

$x_3=2.1-\dfrac{f(2.1)}{f'(2.1)}=2.1-\dfrac{0.061}{11.23}=2.094568$

PART 5：泰勒展開式

設 f 為一在 $x=a$ 之 n 次可微函數。則必存在一 n 次多項式逼近 f ，使

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_n(x)$$

近似值公式是泰勒展開式的特例，只保留一次式

$f(x)\doteq f(a)+\dfrac{f'(a)}{1!}(x-a)$ ，將 a 改為 x ，將 x 改為 $x+\Delta x$ 即可成為

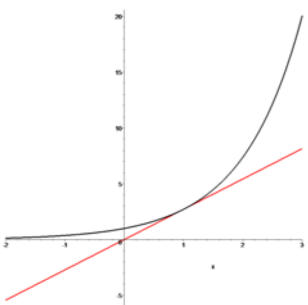
$f(x+\Delta x)\doteq f(x)+f'(x)\Delta x$

PART 6：泰勒展開式之證明

J18	泰勒展開式證明並不容易，有興趣的同學可以試著研究證明過程，也可以當作延伸閱讀觀看。

PART 6：泰勒展開式以數學軟體模擬

以 $f(x)=e^x$ 為例，在 $x=1$分別以 1 次、2 次、3 次、4 次泰勒展開式展開之圖形



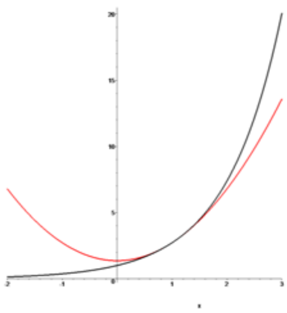
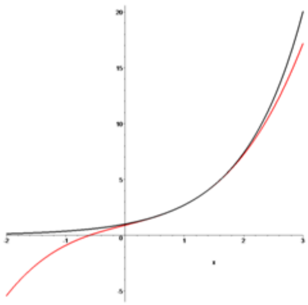


圖 3.　$f(x)=e^x$ 以 1 次多項式逼近　　圖 4.　$f(x)=e^x$ 以 2 次多項式逼近



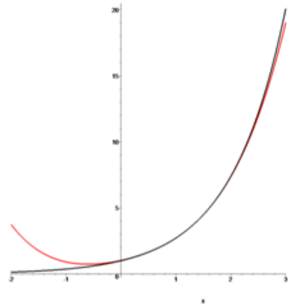


圖 5.　$f(x)=e^x$ 以 3 次多項式逼近　　圖 6.　$f(x)=e^x$ 以 4 次多項式逼近

在 $x=1$ 附近，隨著次數增高，多項式對於 $f(x)=e^x$ 有更佳的逼近。

PART 8：馬克勞林級數

J19

在 $x=0$ 展開之泰勒展開式稱為馬克勞林級數，也就是泰勒展開式的特例，有時將超越函數在 $x=0$ 展開可以得到很方便的無窮級數，因為以下函數均為無限可微分函數

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1!}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n!}$$

$$\ln(x+1)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\text{，}|x|<1$$

$$\tan^{-1}x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\text{，}$$

$|x|<1$