

精熟學習

01.若 $f(x) = x^2 + 2x + 3$ ，若 $x \in [0, 2]$ ，則函數之絕對極大值為

(A) 3 (B) 5 (C) 9 (D) 11

SOL:

$$f'(x) = 2x + 2 = 2(x + 1)$$

臨界值 $x = -1$ ，但 $x = -1$ 不在限制範圍內故不予考慮

絕對極大值可能出現的位置為 $x = 0$ ， $x = 2$

$$f(0) = x^2 + 2x + 3 = 3$$

$$f(2) = 4 + 4 + 3 = 11$$

故選(D)

02.點 (0,1) 到拋物線 $y = x^2 - x$ 之最短距離為(最短距離)

(A) $\sqrt{5}$ (B) $\frac{2\sqrt{5}}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

SOL: 拋物線方程式 $y = x^2 - x$ 可以寫成參數式 $(x, x^2 - x)$

點 (0,1) 到拋物線之距離函數為 $f(x) = (x - 0)^2 + (x^2 - x - 1)^2 = x^2 + (x^2 - x - 1)^2$

$$f(x) = (x - 0)^2 + (x^2 - x - 1)^2 = x^2 + (x^2 - x - 1)^2$$

$$f'(x) = 2x + 2(x^2 - x - 1)(2x - 1) \text{ 展開後分解因式}$$

$$f'(x) = 2x + 2(x^2 - x - 1)(2x - 1) = 4x^3 - 6x^2 + 2 = (x - 1)(4x^2 - 2x - 2)$$

$$f'(x) = (x - 1)^2(4x + 2)$$

臨界值 $x = 1$ ， $x = -\frac{1}{2}$

$$f(1) = 1^2 + (1 - 1 - 1)^2 = 2$$

$$f(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{4} + (\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 1)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

就是當 $x = -\frac{1}{2}$ ，出現極小值 $\sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

故選(D)

03.求 $f(x) = x^2 - 4x + 3$ 在閉區間 $[0, 1]$ 之最大值為(絕對極值)

(A) 1 (B) 0 (C) 3 (D) $\sqrt{2}$

SOL: (1)找出所有的

臨界值

$$f'(x) = 2x - 4 = 2(x - 2)$$

臨界值 $x = 2$ ，因為 $x = 2$ 不在限制範圍內故不予考慮

(2)比大小

$f(0) = 3$, $f(1) = 1 - 4 + 3 = 0$, 最大值當 $x = 0$ 時 $f(0) = 3$
故選(C)

04. 將長 24 公分，寬 24 公分之正方形鐵皮之四個角各截去一個大小相等之正方形，再將四邊上折使之成為一個無蓋之盒子，若欲此盒子體積最大，則截去之正方形邊長應該_____公分最恰當(容積最佳化)
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

SOL:

(1) 設截去邊長 x 公分之正方形

(2) 體積函數 $V(x) = (24 - 2x)^2 x$, $x \in [0, 12]$

(3) 找出體積函數之臨界值，需使用乘法與連鎖律公式

$$V'(x) = 2(24 - 2x)(-2)x + (24 - 2x)^2 \Rightarrow V'(x) = (24 - 2x)[-4x + 24 - 2x] \\ \Rightarrow V'(x) = (24 - 2x)(24 - 6x)$$

臨界值 $x = 12$, $x = 4$, 都落在範圍內

(4) 比大小

$$f(0) = 0 , f(4) = (24 - 8)^2 4 = 1024 , f(12) = 0$$

當 $x = 4$ 可出現最大值 1024

故選(B)

05. 某產品的需求函數是 $p = 8 - 0.02x$, 式中 x 代表產品的單位數， p 代表每單位的價格 (元)。當價格定為多少時會有最大收入 ($R = xp$) (價格最佳化)
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8

SOL:

(1) 建立收入函數 $R(x) = xp = x(8 - 0.02x)$, 整理後得 $R(x) = 8x - 0.02x^2$

(2) 尋找臨界值: $R'(x) = 8 - 0.04x = 0.04(200 - x)$, 臨界值 $x = 200$

x	200		
$f'(x)$	+	$\vdots$	-
$f(x)$	$\nearrow$	$\vdots$	$\searrow$

(3) 一階導數判別法確認當 $x = 200$ 為極大

(4) $p = 8 - 0.02x$, 令 $x = 200$, 得 $p = 4$

故選(B)