

第一週	主題一:數 主題二：函數 主題三：一元二次方程式 主題四：直線方程式
第二週	主題五：極限
第三週	主題六：連續性
第四週	主題七：漸近線
第五週	主題八：導函數
第六週	主題九：指數與對數
第七週	主題十：指數與對數的微分
第八週	主題十一：微分技巧延伸
第九週	主題十二：三角函數(一)
第十週	主題十三：三角函數(二)
第十一週	主題十四：三角函數的微分
第十二週	主題十五：相對極大與極小
第十三週	主題十六：絕對極值
第十四週	主題十七：近似值
第十五週	主題十八：相關變律
第十六週	主題十九：羅必達法則
第十七週	主題二十：不定積分
第十八週	主題二十一：不定積分的其他技巧

第十二週相對極大與極小

主題十五：

相對極大與

極小

PART 1：單調函數

J03

定義：若 $x_1 < x_2$ ，則 $f(x_1) < f(x_2)$ 稱為嚴格增函數，如圖 1

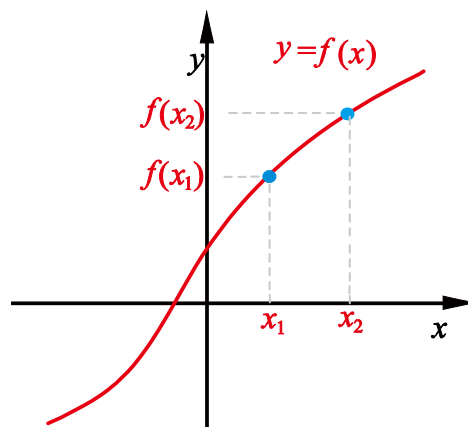


圖 1.嚴格增函數

定理:若 f 為嚴格增函數，則 $f'(x) > 0$ ，也就是在函數上任何點之切線斜率為正值。

定義：若 $x_1 < x_2$ ，則 $f(x_1) > f(x_2)$ ，我們稱為嚴格減函數，如圖 2

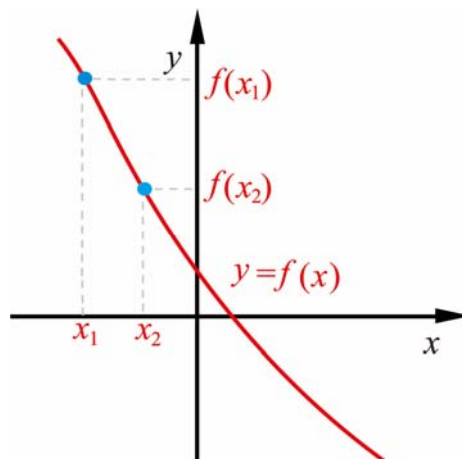


圖 2.嚴格減函數

定理:若 f 為嚴格減函數，則 $f'(x) < 0$ ，也就是在函數上任何點之切線斜率為負值。

PART 2：相對極值

J04

相對極值：

若函數 $y = f(x)$ 在 $x = x_i$ 附近的區間 $(x_i - \delta, x_i + \delta)$, $\delta > 0$ ，只要 $x \in (x_i - \delta, x_i + \delta)$ ，滿足 $f(x_i) > f(x)$ ，則稱 $f(x_i)$ 為相對極大值

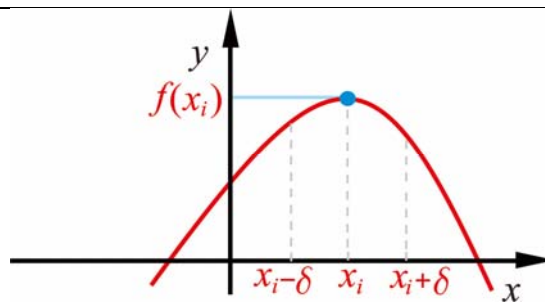


圖 3.相對極大值

反之，若 $f(x_i) < f(x)$ ，則稱 $f(x_i)$ 為相對極小值

PART 3：臨界點

觀察圖 4，當 $x = x_i$ 時， $f(x_i)$ 可能會出現相對極值的點，我們稱 $x = x_i$ 為臨界點，臨界點出現的狀況有兩種：

- (1) 當 $x = x_i$ ，圖形有水平切線，也就是 $f'(x_i) = 0$
- (2) 當 $x = x_i$ 圖形出現尖點，也就是 $f'(x_i)$ 不存在

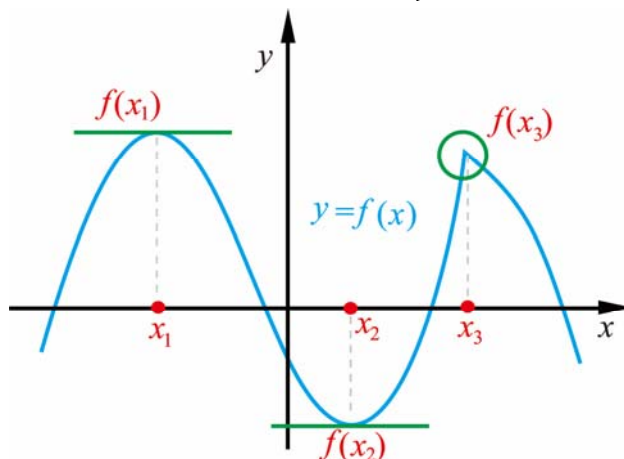


圖 4.相對極值出現的狀況

例題(十字交乘因式分解)

設 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 1$ ，找出所有的臨界點

SOL: 令 $f'(x) = 6x^2 - 6x - 36 = 0$ ，得 $x^2 - x - 6 = 0$ ，利用十字交乘分解因式 $(x-3)(x+2) = 0$ ， $x = 3$ 與 $x = -2$ 為臨界點。

例題: (分式函數)

設 $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ ，找出所有的臨界點

SOL: $f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2 + 3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$ ，

$x = 3$ 與 $x = -1$ 與 $x = 1$ 為臨界點。

PART 4：一階導數判別法

J06

若已知 $x = x_i$ 為臨界點， $x = x_i$ 就是發生相對極值的可能位置，但如何判斷是相對極大還是相對極小呢?在此介紹以函數增減觀念判斷的方法：

當 $x = x_i$ 出現相對極大，見圖 5， x_i 的左方為嚴格增函數，右方

為嚴格減函數，口訣是:先上再下

x	x_i	
$f'(x)$	+	-
增減	$\nearrow$	$\searrow$

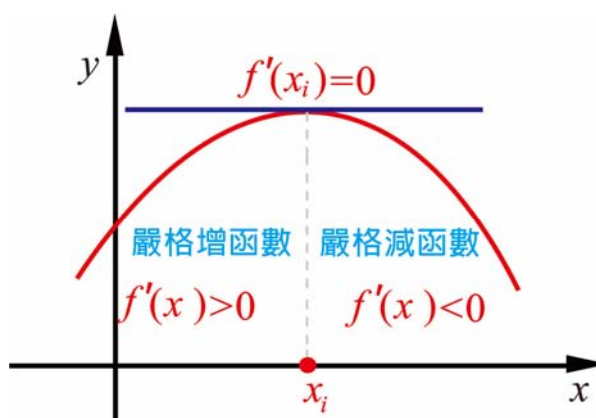


圖 5.相對極大出現的狀況

當 $x = x_i$ 出現相對極小，見圖 6， x_i 的左方為嚴格減函數，右方為嚴格增函數，口訣是:先下再上

x	x_i	
$f'(x)$	-	+
增減	$\searrow$	$\nearrow$

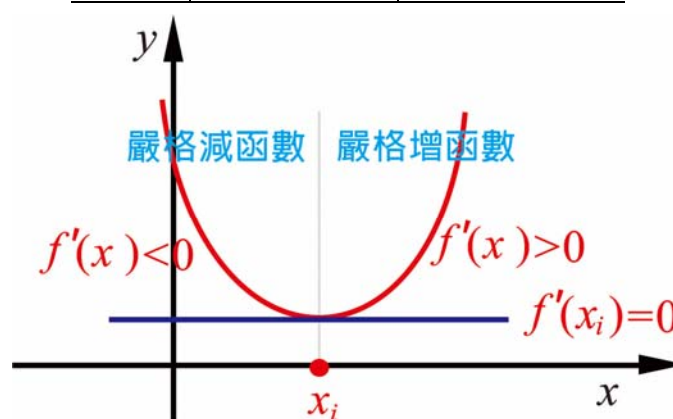


圖 6.相對極小出現的狀況

PART 5：非極大亦非極小

當 $f'(x_i) = 0$ ，則 $x = x_i$ 一定是相對極大或相對極小嗎？答案是否定的，如圖 7，當 $x = x_i$ 的左方為嚴格增函數，右方也是嚴格增函數，雖然在 $x = x_i$ 時 f 有水平切線，但它非極大非極小，只能算 $x = x_i$ 是增函數之休息站。當然，若是嚴格減函數也是一樣。

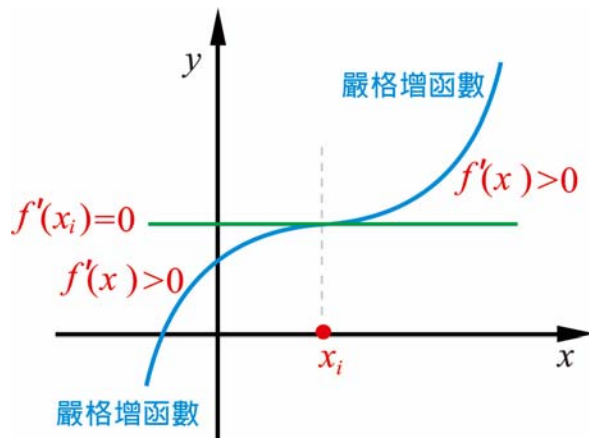


圖 7. $f'(x_i) = 0$ 但非極大非極小的狀況

x	x_i	
$f'(x)$	+	+
增減	↗	↗

結論: 當 $f'(x_i) = 0$, $x = x_i$ 是不是極值發生處, 還是要透過一階導數判別法才能確認

例題: (函數極值)

找出 $f(x) = x^3 - 3x + 3$, 找出所有的相對極值

SOL: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$,

$x = 1$ 與 $x = -1$ 為臨界點。

一階導數判別法:

x	-1	1
$f'(x)$	+	-
增減	↗	↘

說明: $x = -1$ 先上再下, 出現相對高點 $f(-1) = 5$

$x = 1$ 先下再上, 出現相對低點 $f(1) = 1$

例題: (增減區間)

函數 $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ 在何處遞增? 在何處遞減?(以區間表示)

SOL: $f'(x) = \frac{2x(x-1) - (x^2 + 3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2} = \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$,

$x = -1$ 、 $x = 1$ 與 $x = 3$ 為臨界點。

一階導數判別法:

x	-1	1	3
$f'(x)$	+	-	+
增減	↗	↘	↗

說明: 遞增: $(-\infty, -1) \cup (3, \infty)$

遞減: $(-1, 1) \cup (1, 3)$, 在此建議同學使用開區間, 避開 $x = 1$ 這個不連續點

PART 6 : 凹性

J07

(1) 上凹:

函數開口向上, 如圖 8, 觀察這個圖由左向右之切線斜率變化

切線斜率由”-”轉”0”到”+”

$f'(x)$ 是增函數

$f'(x)$ 的導函數 >0

$f''(x)>0$

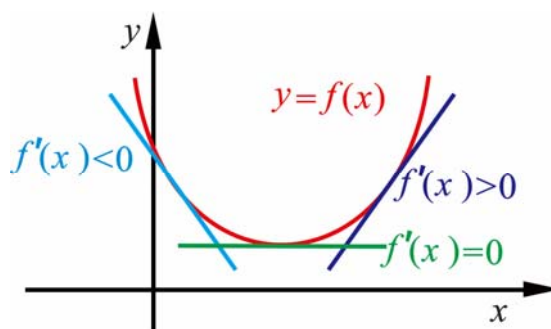


圖 8. 上凹圖形切線斜率之變化

切線斜率由”+”轉”0”到”-”

$f'(x)$ 是減函數

$f'(x)$ 的導函數 <0

$f''(x)<0$

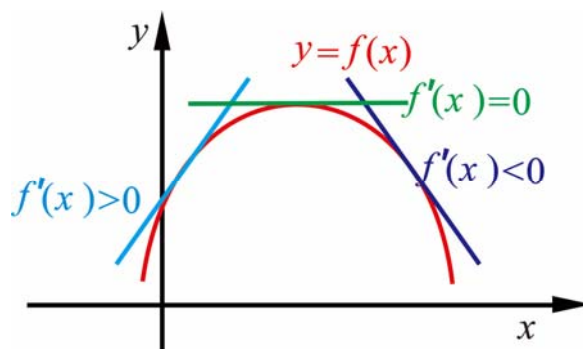


圖 9. 下凹圖形切線斜率之變化

結論：檢測凹性的方法，看二次導數正負號

PART 7：反曲點

J08

定義：是上凹與下凹交界的點，稱為反曲點，如圖 10

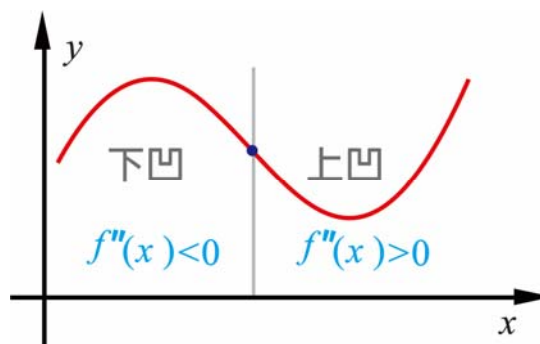


圖 10. 反曲點發生的狀況

尋找反曲點座標的方法：

- (1) 若 $f''(x_i)=0$ 或 $f''(x_i)$ 不存在之點，稱二階臨界值
- (2) 檢測二階臨界值 $x=x_i$ 左右二階導數是否正負相間(類似一階導數判別法)

例題: (二階臨界值為反曲點)

函數 $f(x) = x^3 - 6x^2 - 7$ 之反曲點座標

SOL: $f'(x) = 3x^2 - 12x$, $f''(x) = 6x - 12$, 二階臨界值 $x = 2$

x	2	
$f''(x)$	-	+
凹性	∩	∪

例題: (二階臨界值不為反曲點)

尋找 $f(x) = x^4$ 之反曲點座標

SOL: $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, 二階臨界值 $x = 0$

x	0	
$f''(x)$	+	+
凹性	∪	∪

這是一個雖為二階臨界值卻不為反曲點之反例

PART 8：二階導數判別法

J08

已知 $x = x_i$ 為 $y = f(x)$ 之臨界值，想要知道函數在 $x = x_i$ 出現相對極大？相對極小？都不是？除了利用一階導數判別法判斷，利用上凹或下凹的性質判斷也是不錯的方法

(1) $f'(x_i) = 0$, 水平切線

$f''(x_i) > 0$, 上凹 綜合結果：相對極小

(2) $f'(x_i) = 0$, 水平切線

$f''(x_i) < 0$, 上凹 綜合結果：相對極大

例題: (二階導數判別法)

求 $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ 之相對極值(採用二階導數判別法)

SOL: $f'(x) = -4x^3 + 4x = -4x(x^2 - 1) = -4x(x - 1)(x + 1)$,

臨界值(1) $x = 0$, (2) $x = -1$, (3) $x = 1$

二階導數 $f''(x) = -12x^2 + 4$,

(1) $f''(0) = 4 > 0$ 相對極小

(2) $f''(-1) = -8 < 0$ 相對極大

(3) $f''(1) = -8 < 0$ 相對極大

ANS: 相對極小 $f(0) = 1$, 相對極大 $f(1) = f(-1) = 2$