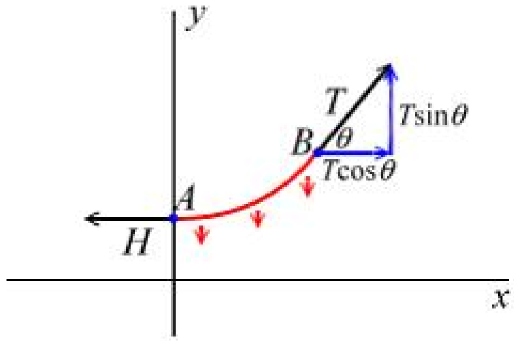
懸鏈線方程式的證明



假設鏈子的質料是均勻的且密度為 ρ ，且S為AB之間的長度

懸鏈線AB之中A點的張力為H(水平張力)， B點的張力為T(切線方向) 既然造成平衡，我們可以得知

$Tcos\theta = H$ 而且 $Tsin\theta = \rho S$(垂直張力是鏈子本身的重量)

考慮B點: $\frac{dy}{dx} = tan\theta = \frac{Tsin\theta}{Tcos\theta} = \frac{\rho S}{H}$............(*)

弧長公式:

$$(dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \qquad \Rightarrow \qquad dS = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$$

對(*)微分，得到

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{H}\frac{dS}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho}{H}\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}$$.............(**)

令 $p = \frac{dy}{dx}$ (**)可化簡為 $\frac{dp}{dx} = \frac{\rho}{H}\sqrt{1+p^2}$

變數分離 $\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}dp = \frac{\rho}{H}dx$ $\qquad \int\frac{1}{\sqrt{1+p^2}}dp = \int\frac{\rho}{H}dx$

解出 $ln(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{\rho}{H}x + C$

I由於當$x = 0$時 ，$\frac{dy}{dx} = 0$ ，將此初始條件代入得 $0 = 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0$

$$ln(p + \sqrt{1+p^2}) = \frac{\rho}{H}x$$

$$p + \sqrt{1+p^2} = exp(\frac{\rho}{H}x)$$

$$\sqrt{1+p^2} = exp(\frac{\rho}{H}x) - p$$

$$1+p^2 = exp(2\frac{\rho}{H}x) - 2pexp(\frac{\rho}{H}x) + p^2$$

$$1 = exp(2\frac{\rho}{H}x) - 2pexp(\frac{\rho}{H}x)$$

$$2pexp(\frac{\rho}{H}x) = exp(2\frac{\rho}{H}x) - 1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{exp(\frac{\rho}{H}x) - exp(-\frac{\rho}{H}x)}{2}$$

$$dy = \frac{exp(\frac{\rho}{H}x) - exp(-\frac{\rho}{H}x)}{2}dx$$

$$y = \frac{1}{2}\left[(\frac{H}{\rho})exp(\frac{\rho}{H}x) - (-\frac{H}{\rho})exp(-\frac{\rho}{H}x)\right]$$

$$y = \frac{1}{2}\left[(\frac{H}{\rho})exp(\frac{\rho}{H}x) + (\frac{H}{\rho})exp(-\frac{\rho}{H}x)\right]$$

為了方便我們令$a = \frac{\rho}{H}$

$$y = \frac{ex/a + e - x/a}{2a}$$

此即為懸鏈線的方程式，這裡的 a 與鏈子的質料有關