

精熟學習

1. 若函數 $f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 1, & x \leq 2 \\ ax + b, & x > 2 \end{cases}$ 可微分，求 a 與 b

解

SOL:

(1) 在 $x \leq 2$ 時， $f(x) = x^2 + x - 1$ 為多項式函數，必連續且可微分

(2) 在 $x > 2$ 時， $f(x) = ax + b$ 為多項式函數，必連續且可微分 (3)

唯一可能有問題的位置是 $x = 2$ ，檢驗左極限是否等於右極限？

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + x - 1) = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (ax + b) = 2a + b \Rightarrow 2a + b = 5$$

檢驗左導數是否等於右導數？

$$f'_-(2) = (2x + 1)|_{x=2} = 5$$

$$f'_+(2) = a|_{x=2} = a$$

得到

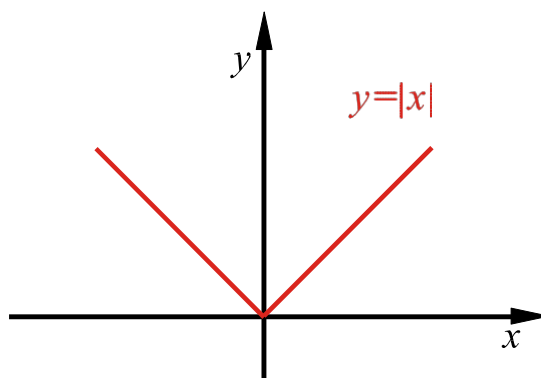
$$\begin{cases} 2a + b = 5 \cdots \cdots (1) \\ a = 5 \cdots \cdots (2) \end{cases}$$

$$a = 5, b = -5$$

2. 試繪出 $y = |x|$ 之圖形，討論在 $x = 0$ 之連續性與是否可微分

$$(1) y = |x| \text{ 可改寫為 } y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

圖形如下



- (2) 檢驗左極限是否等於右極限？

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0$$

極限值=0=函數值， f 在 $x=0$ 連續

(3) 檢驗左導數是否等於右導數？

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = 1$$

左導數 $\neq$ 右導數，在 $x=0$ 不可微分

3. 試求 $y = x^2\sqrt{x+1}$ 在 (3,18) 之切線方程式

SOL:

$$y' = 2x\sqrt{x+1} + \frac{x^2}{2\sqrt{x+1}}$$

$$m = 2 \cdot 3\sqrt{4} + \frac{9}{2\sqrt{4}} = 12 + \frac{9}{4} = \frac{57}{4}$$

利用點斜式得切線方程式

$$y - 9 = \frac{57}{4}(x - 3)$$

4. 一個正方形之邊長以每秒 4 公分的速率增加，當邊長為 6 公分時，面積增加的速率為多少？

SOL: 設正方形之邊長為 x ，正方形之面積 $A = x^2$

$$dA = 2x dx \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

依照題意， $x=6$ ， $\frac{dx}{dt}=4$ ，故 $\frac{dA}{dt} = 2 \cdot 6 \cdot 4 = 48$ 平方公分/秒

5. 設 $f(x) = x^2 + 2x$ ， $g(x) = \sqrt{x}$ $x \geq 0$ ，試以(1)先求出合成函數後再微分(2)利用連鎖律求 $\frac{d}{dx} f(g(x)) = ?$ (連鎖率)

用連鎖律求 $\frac{d}{dx} f(g(x)) = ?$ (連鎖率)

SOL:

(1) 求出合成函數後再微分當 $x \geq 0$ 時，

$$f(\sqrt{x}) = \sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x} = |x| + 2\sqrt{x} = x + 2\sqrt{x}$$

$$\frac{d}{dx}(x + 2\sqrt{x}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

(2) 利用連鎖律

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = (2\sqrt{x} + 2)(\sqrt{x})' = (2\sqrt{x} + 2) \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$$