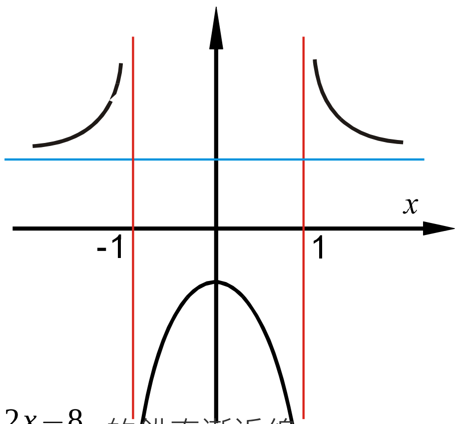
精熟學習

01.求函數 $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ 的鉛直漸近線

SOL: 令分母為 0

$x^2-1=0$ ，$(x-1)(x+1)=0$ 有兩條鉛直漸近線，方程式為 $x=1$ 與 $x=-1$ 函數概圖如下



02. 求函數 $f(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-4}$ 的鉛直漸近線

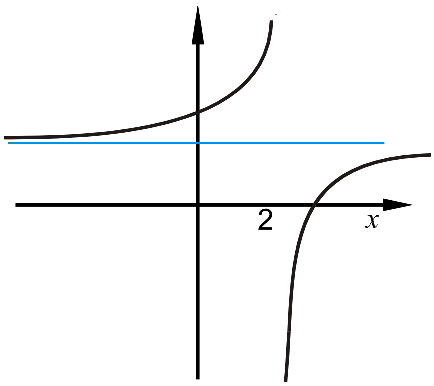
SOL: $f(x)=\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-4}=\dfrac{(x-4)(x+2)}{(x-2)(x+2)}$

因為分子與分母有共同因式 $(x+2)$ ，消去後

$f(x)=\dfrac{x-4}{x-2}$ $,x\neq 2$

只有一條鉛直漸近線，其方程式為 $x=2$

函數概圖如下



3. 函數 $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ 是否有一條鉛直漸近線 $x=2$？

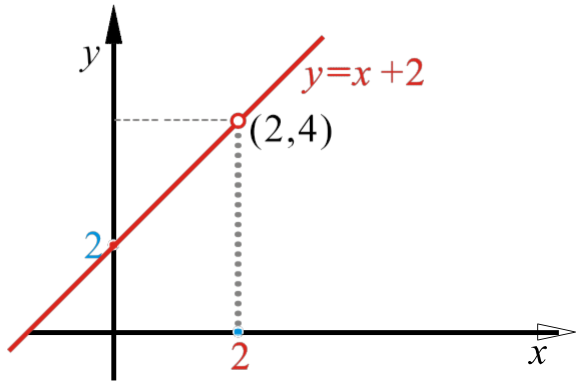
SOL: $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}=\dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}$

因為分子與分母有共同因式 $(x-2)$，消去後

$f(x)=x+2\ ,x\neq 2$

其圖形為直線 $y=x+2$ 去掉一點 $(2,4)$，故此函數沒有漸近線

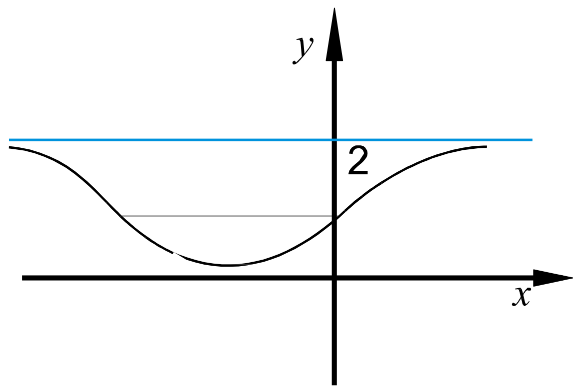
函數概圖如下



4. 求函數 $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+8}{x^2+2x+8}$ 之漸近線

SOL: 分母 $x^2+2x+8=0$ 沒有實根，也就是無法在實數中分解，故沒有鉛直漸近線，極限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4x+8}{x^2+2x+8}=2$

可以知道 $y=2$ 為一條水平漸近線



5. 求函數 $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$ 之漸近線

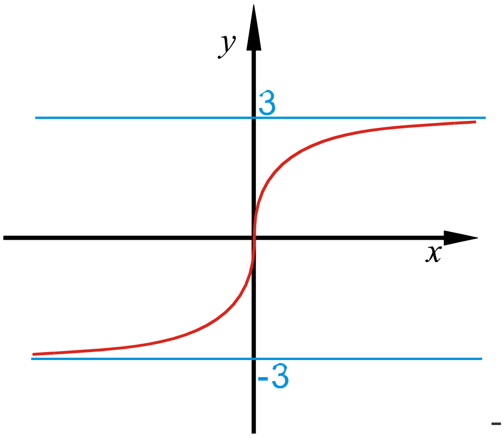
SOL: 分母 $\sqrt{x^2+1}$ 恆正，故沒有鉛直漸近線

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=3$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-3$$

故有 $y=3$ 與 $y=-3$ 兩條水平漸近線

函數概圖如下



6. 求函數 $f(x)=\dfrac{3x^2+2x+1}{x+3}$ 之所有漸近線

SOL:

(1)令分母為 0，得 $x=-3$ 為鉛直漸近線

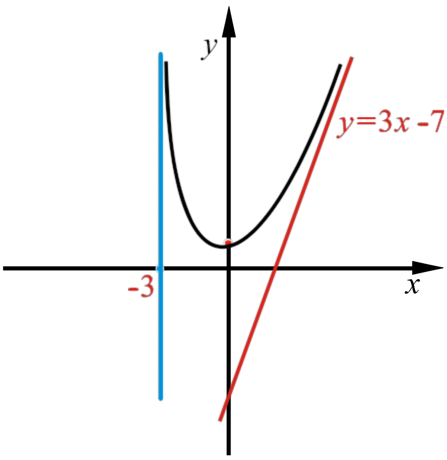
(2)利用長除法將假分式 $\dfrac{3x^2+2x+1}{x+3}$ 改寫為帶分式

$$\frac{3x^2+2x+1}{x+3}=(3x-7)+\frac{22}{x+3}$$

$$f(x)=\frac{3x^2+2x+1}{x+3}=(3x-7)+\frac{22}{x+3}$$

當 $x\to\infty$ 時， $f(x)\to 3x-7$ ，故

$y=3x-7$ 為斜漸近線方程式，函數概圖如下



7. 求函數 $f(x)=\dfrac{x^3+x+5}{x^2+1}$ 之漸近線方程式

SOL:

(1)分母恆正，沒有鉛直漸近線 (2)分母的次數低於分子的次數一次，有斜漸近線，利用改寫帶分式的作法

$$f(x)=\frac{x^3+x+5}{x^2+1}=x+\frac{5}{x^2+1}$$

$y=x$ 為斜漸近線方程式，函數概圖如下