第一週	主題一:數
	主題二：函數
	主題三：一元二次方程式
	主題四：直線方程式
第二週	主題五：極限
第三週	主題六：連續性
第四週	主題七：漸近線
第五週	主題八：導函數
第六週	主題九：指數與對數
第七週	主題十：指數與對數的微分
第八週	主題十一：微分技巧延伸
第九週	主題十二：三角函數(一)
第十週	主題十三：三角函數(二)
第十一週	主題十四：三角函數的微分
第十二週	主題十五：相對極大與極小
第十三週	主題十六：絕對極值
第十四週	主題十七：近似值
第十五週	主題十八：相關變律
第十六週	主題十九 ： 羅必達法則
第十七週	主題二十：不定積分
第十八週	主題二十一：不定積分的其他技巧

<table>
<tr><th colspan="2">第四週 漸近線</th></tr>
<tr><td rowspan="3">主題七：漸近線</td><td>

PART 1：漸近線的意義

定義：假設 $y = f(x)$ 的圖形上一點沿曲線無限遠離原點，而與某一條直線的距離趨近於零，則這直線稱為 $y = f(x)$ 這條曲線的漸近線。

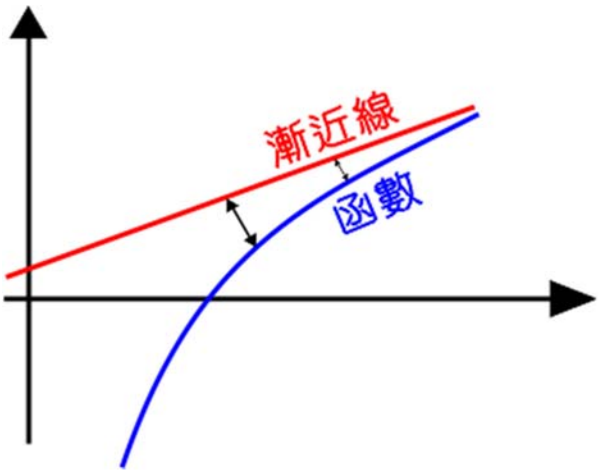


圖 1.漸近線之定義

</td></tr>
<tr><td>

PART 2：漸近線的種類

</td></tr>
<tr><td>

漸近線依照斜率可分成三種

(1) 鉛直漸近線：漸近線無斜率的狀況(斜率=∞)

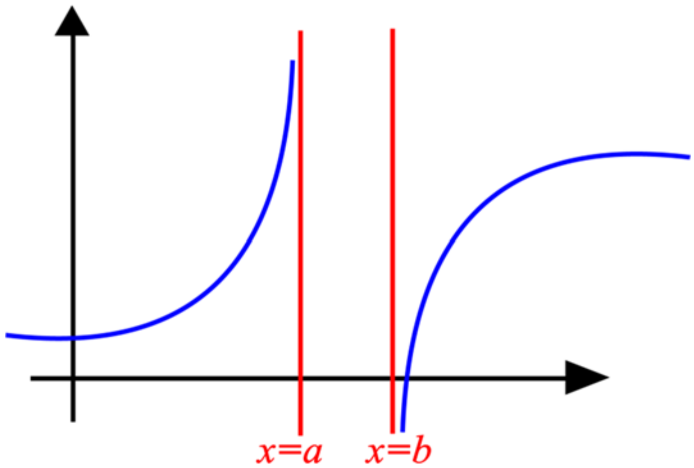


圖 2.鉛直漸近線

(2) 水平漸近線：漸近線之斜率為 0

</td></tr>
</table>

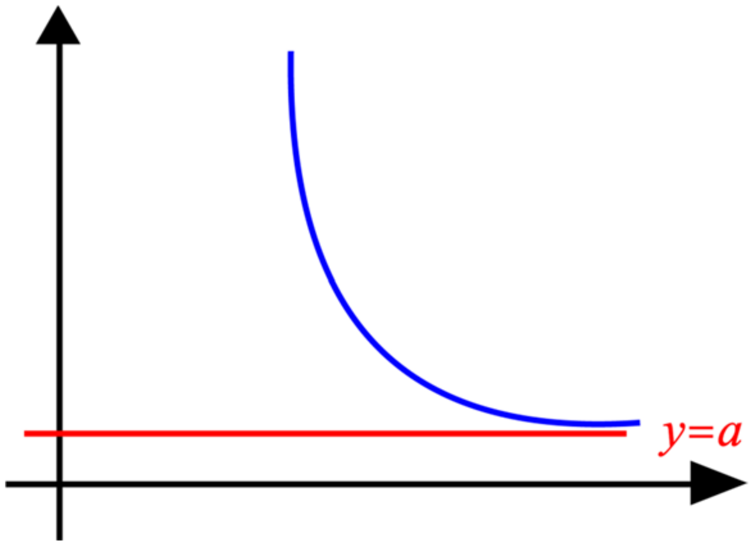


圖 3. 水平漸近線

(3) 斜漸近線：漸近線不為水平，不為鉛直的狀況

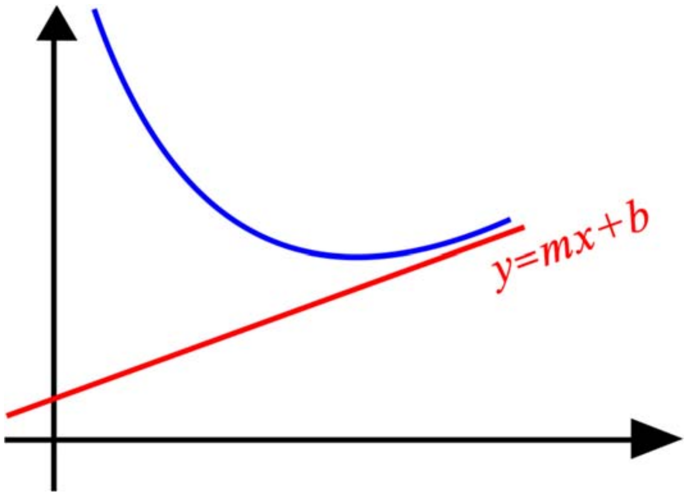
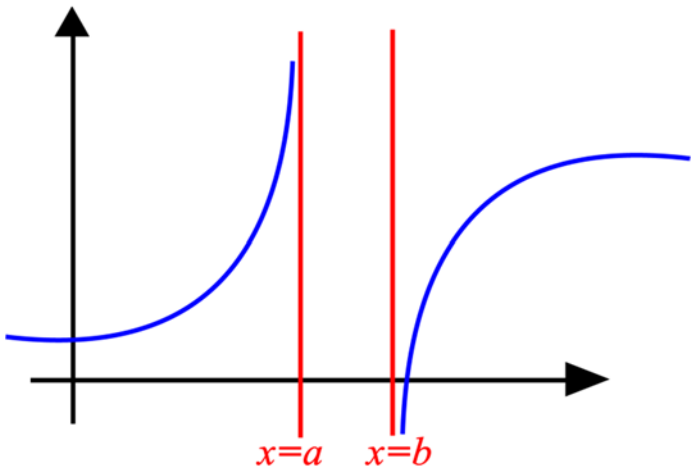


圖 4. 斜漸近線

PART 3：鉛直漸近線的求法

D01

觀念:鉛直漸近線發生的狀況如圖 2



是當 x 趨近 a 或 b 時，函數值會趨近 ∞ 或 $-\infty$，這種情況都是發生在分式函數上，例如

$f(x)=\dfrac{3x+1}{(x-a)(x-b)}$ 就有 $x=a$ 與 $x=b$ 兩條漸近線，簡單的找尋鉛直漸近線方法，令分母為零，解出 $x=?$ 就是鉛直漸近線方程式。

例題 1 設 $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ ，求圖形之鉛直漸近線

SOL:當 x 趨近 1 時， $f(x)\to\infty$ ，我們可以確認 $x=1$ 為鉛直漸近線，函數圖形為雙曲線，圖形如下

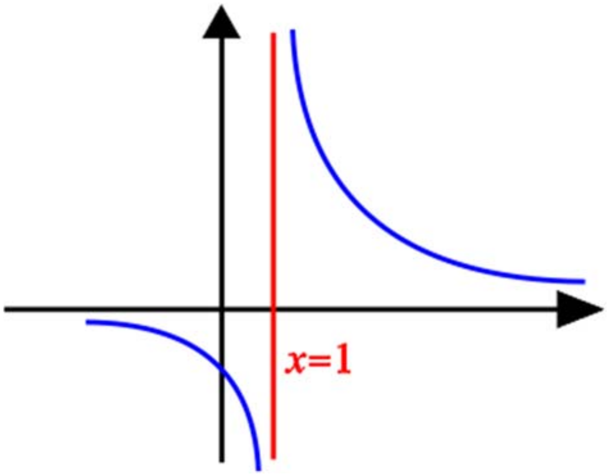


圖 5 雙曲線圖

例題 2 設 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3x+2}$ ，求圖形之鉛直漸近線

SOL: $f(x)=\dfrac{x}{x^2+3x+2}=\dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$ ，我們可以確認 $x=-1$ 與 $x=-2$ 都為鉛直漸近線，對於我們繪函數圖形很有幫助，待介紹完水平漸近線後一併處理

PART 4：水平漸近線求法

D02

是當 x 趨近 ∞ 或 $-\infty$ 時，函數值會趨近一個定數，這種情況若發生在分子與分母都是多項式的分式函數上，則分子與分母的次數會相等(當然絕對不限於是多項式的狀況)，例如

$f(x)=\dfrac{3x^2-7x+1}{2x^2+5x+6}$ ， $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-7x+1}{2x^2+5x+6}=\dfrac{3}{2}$ ，此說明了當 x 趨近 ∞ 或 $-\infty$ 時， y 趨近 $\dfrac{3}{2}$ ，方程式 $y=\dfrac{3}{2}$ 就是水平漸近線。

例題 3 設 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ ，求圖形之水平漸近線

SOL: (1) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$ ，(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$

我們可以確認 $y=0$ 為水平漸近線。

PART 5：斜漸近線求法

D03

尋找斜漸近線的方法

(1)設斜漸近線為 $y=mx+b$

(2) $m=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

(3) $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]$

由(2)知道，假設

$f(x)=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_nx^m+b_{n-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0},a_n\neq 0,b_n\neq 0$，若 $n-m=1$，則 $y=f(x)$ 之圖形必有斜漸近線。

例題 4 設 $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x}$，求圖形之斜漸近線方程式 【96 政大科管所】

SOL: $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{x^2+4}{x^2}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+4}{x^2}=1$，故知道 $m=1$

$f(x)-x=\dfrac{x^2+4}{x}-x=\dfrac{x^2+4-x^2}{x}=\dfrac{4}{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x}=0$，故知道 $b=0$

斜漸近線方程式為 $y=x$

PART 6：鉛直漸近線的進階討論

若函數 $y=f(x)$ 有一條鉛直漸近線 $x=a$，函數圖形可能有 4 種狀況，以圖形說明

(1)

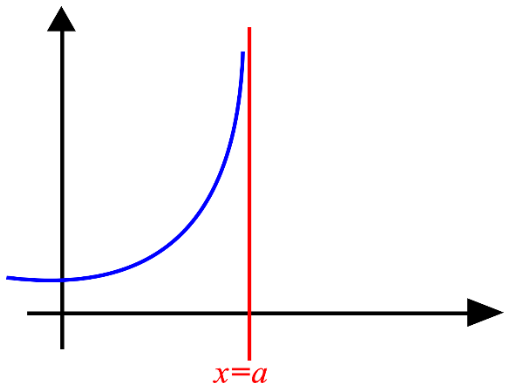


圖 6 鉛直漸近線狀況 1

(2)

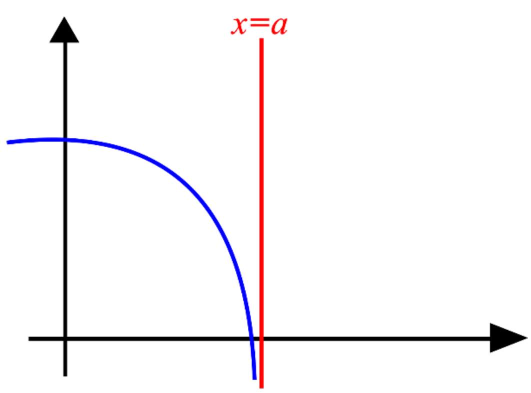


圖 7 鉛直漸近線狀況 2

(3)

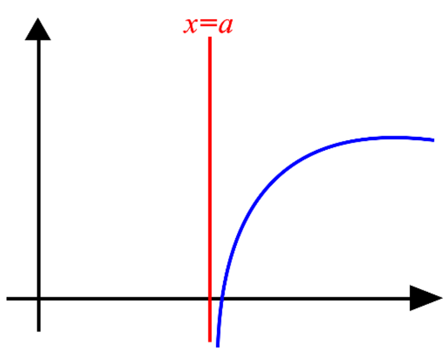


圖 8 鉛直漸近線狀況 3

(4)

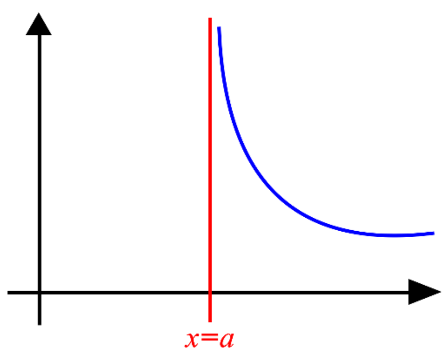


圖 9 鉛直漸近線狀況 4

狀況 1：$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\infty$

狀況 2：$\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=-\infty$

狀況 3： $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=-\infty$

狀況 4： $\lim\limits_{x\to a^{+}} f(x)=\infty$

考慮左右極限對於函數圖形的描繪很有幫助

PART 7：水平漸近線的進階討論

若函數 $y=f(x)$ 有一條水平漸近線 $y=a$ ，函數圖形可能有 2 種狀況，以圖形說明

(1)

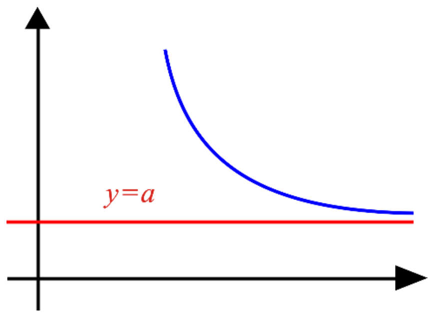


圖 10 水平漸近線狀況 1

(2)

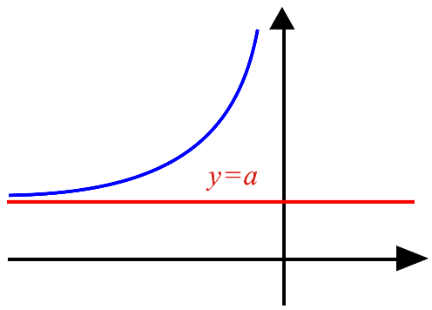


圖 11 水平漸近線狀況 2

狀況 1： $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$

狀況 2： $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$

PART 8：綜合練習

例題 5 找出 $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ 所有的漸近線

SOL:

(1)鉛直漸近線： $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\infty$ ， $\lim\limits_{x\to 0^{-}}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$ ，得知 $x=0$ 為鉛直漸近線

(2)水平漸近線： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\infty$ ， $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=-\infty$ ，不為定值，沒有水平漸近線

(3)斜漸近線： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{f(x)}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=1$ ， $m=1$ ，

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0 \text{，} b=0$$

故 $y=x$ 為斜漸近線方程式，綜合上面結果，函數可描繪為圖 12

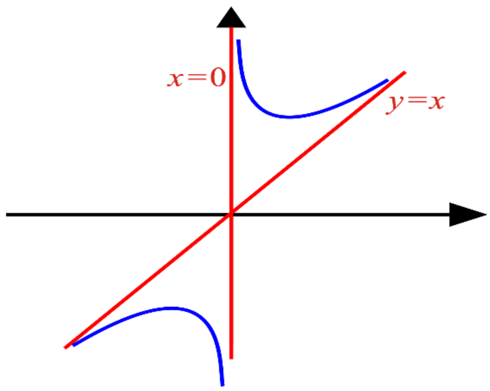


圖 12 函數描繪圖

	例題 6 (經濟學應用) 假設一家公司生產日用品，開發模具花費 5,000 元，每生產一件原料成本 10 元，設生產 x 件，平均成本為__(a)__，生產 500 件平均成本__(b)__，生產 5,000 件平均成本__(c)__，生產無限多件平均成本__(d)__(設模具可無限次使用) SOL: (a)設 C 為成本， $C=5,000+10x$ ， $\overline{C}=\dfrac{5,000+10x}{x}$ (b) $x=500$ ， $\overline{C}=\dfrac{5,000+5,000}{500}=20$ 元 (c) $x=5,000$ ， $\overline{C}=\dfrac{5,000+50,000}{5,000}=11$ 元 (d) $\lim\limits_{x\to\infty}\overline{C}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5,000+10x}{x}=10$ 元 此例說明小規模生產成本較高，大量生產之平均成本可逼近 10 元(忽略模具成本)