

精熟學習

1. 函數 $f(x) = \begin{cases} 2x+k, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$ 為連續函數，則 $k = ?$

- (A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1

SOL:

(1) 在 $x \leq 1$ 時， $f(x) = 2x + k$ 為多項式函數，必連續

(2) 在 $x > 1$ 時， $f(x) = x^2$ 為多項式函數，必連續

(3) 唯一可能有問題的位置是 $x = 1$ ，檢驗左極限是否等於右極限？

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x + k) = 2 + k$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$$

$$2 + k = 1 \Rightarrow k = -1$$

如此才可肯定此函數在整個實數線上連續，故選(B)

02. 函數 $f(x) = |x|$ 是否為連續函數? (A) 是 (B) 否

SOL:

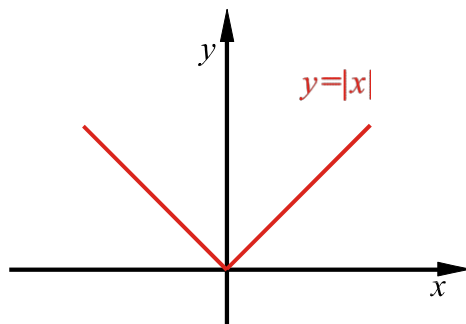
$f(x) = |x|$ 可以分段定義如下

$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$$

(1) 左極限 $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = 0$ ，右極限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 0$ ，左極限與右極限相等，故 $f(x) = |x|$

是連續函數

(2) 其圖形如下



故選(A)

3. 函數 $f(x) = \frac{|x|}{x}$ 是否為連續函數? (A) 是 (B) 否

SOL:

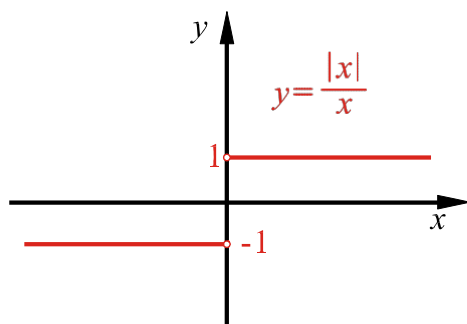
$f(x) = \frac{|x|}{x}$ 可以分段定義如下

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

(1) 左極限 $\lim_{x \rightarrow 0^-} |x| = -1$ ，右極限 $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x| = 1$ ，左極限與右極限不相等，故

$f(x) = \frac{|x|}{x}$ 在 $x = 0$ 不連續

(2) 其圖形如下



故選(B)

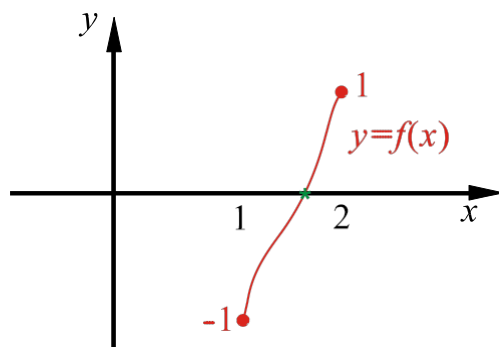
4. 假設 $f(1) < 0$ ， $f(2) > 0$ ，則 f 在區間 $(1, 2)$ 中必有一根，下列敘述何者錯誤？

- (A) 函數需有連續性質 (B) 利用實數的完備性
(C) 利用有理數的稠密性 (D) 稱為勘根定理

SOL: 勘根定理需要的條件

函數要在實數中連續，當然是利用實數的完備性，有理數的稠密性是無法確保函數圖形與 x 軸有交點

故選(C)



5. 函數 $f(x) = \begin{cases} 3x+5, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$ ，則單邊極限 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = ?$

- (A) 8 (B) 4.5 (C) 2 (D) 1

SOL: 由 $x \rightarrow 1^+$ ，表示 x 由大於 1 的方向趨近，原式可以改寫為

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 = 1$$

故選(D)

06. 函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ k, & x = 2 \end{cases}$ 在 $x = 2$ 連續，試求 k 之值

SOL: (1) 極限值:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

(2) 函數值: $f(2) = k$

(3) 極限值 = 函數值，故 $k = 4$

07. 函數 $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & x \leq 4 \\ x^2 - 14, & x > 4 \end{cases}$ 試討論函數在整個實數線上是否連續。

SOL:

(1) 在 $x \leq 4$ 時， $f(x) = \frac{x}{2}$ 為多項式函數，必連續

(2) 在 $x > 4$ 時， $f(x) = x^2 - 14$ 為多項式函數，必連續 (3) 唯一可能有問題的位置是 $x = 4$ ，檢驗左極限是否等於右極限？

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x}{2} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (x^2 - 14) = 2$$

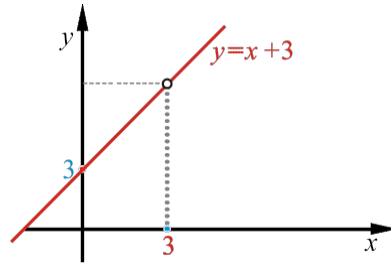
極限值與函數值均為 2，可以肯定此函數在整個實數線上連續

08. 畫出 $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ 之圖形，並找出使函數連續之區間

SOL:

$$(1) f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x - 3}, \text{ 可化簡為 } f(x) = x + 3, \quad x \neq 3$$

圖形為



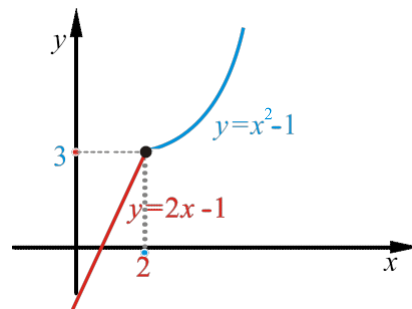
(2) f 為線型函數，但在 $x = 3$ 的位置沒有定義

(3) 使函數連續之區間 $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$ 或寫 $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ 也可以

09. 畫出 $f(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \leq 2 \\ x^2-1, & x > 2 \end{cases}$ 之圖形，並找出使函數連續之區間

SOL:

(1) 圖形為



(2) 分段定義的兩函數交會於 $(2, 3)$

(3) 使函數連續之區間 $(-\infty, \infty)$ 或寫 $\mathbb{R}$ 也可以

10. f 定義如下，求 k 之值，使函數在整個實數線上連續

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 2 \\ ax^2, & x > 2 \end{cases}$$

SOL:

(1) 在 $x \leq 2$ 時， $f(x) = x^3$ 為多項式函數，必連續 (2) 在 $x > 2$ 時， $f(x) = ax^2$ 為多項式函數，必連續 (3) 唯一可能有問題的位置是 $x = 2$ ，檢驗左極限是否等於右極限？

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (ax^2) = 4a$$

極限需存在， $8 = 4a \Rightarrow a = 2$