

第一週	主題一:數 主題二：函數 主題三：一元二次方程式 主題四：直線方程式
第二週	主題五：極限
第三週	主題六：連續性
第四週	主題七：漸近線
第五週	主題八：導函數
第六週	主題九：指數與對數
第七週	主題十：指數與對數的微分
第八週	主題十一：微分技巧延伸
第九週	主題十二：三角函數(一)
第十週	主題十三：三角函數(二)
第十一週	主題十四：三角函數的微分
第十二週	主題十五：相對極大與極小
第十三週	主題十六：絕對極值
第十四週	主題十七：近似值
第十五週	主題十八：相關變律
第十六週	主題十九：羅必達法則
第十七週	主題二十：不定積分
第十八週	主題二十一：不定積分的其他技巧

第三週 連續性

主題六：連續

性

PART 1：直觀的連續函數

在介紹函數的微分前，一定要先考慮函數的連續性，因為函數若不連續，函數就不可微分：

以最簡單的想法：在紙上用筆畫出函數圖形，筆不離開紙面，劃出的圖形沒有斷點

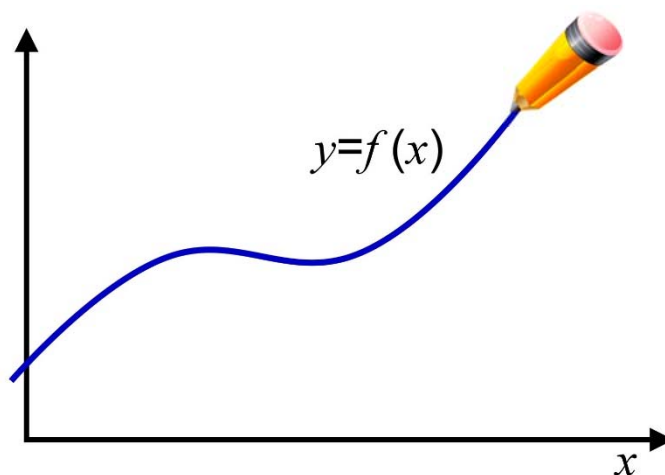


圖 1.連續函數的直觀判斷法

PART 2：常見的函數不連續的狀況

以直觀的連續函數判斷，以圖 2 為例， $f(x)$ 在

- (1) 當 $x=2$ 不連續，理由是 $f(x)$ 在 $x=2$ 沒有定義
- (2) 當 $x=5$ 不連續，理由是 $f(x)$ 在 $x=5$ 出現跳躍(jump)
- (3) 當 $x=7$ 不連續，理由是 $f(x)$ 在 $x=7$ 雖然有定義，但 $f(7)$ 的位置不是我們所希望的位置。

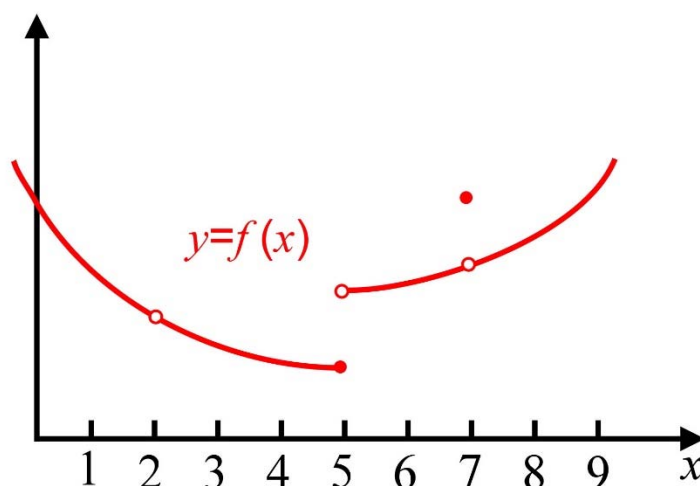


圖 2.常見的不連續函數的狀況

依據上面不連續的狀況，再不畫圖的前提下，我們可以思考判斷函數是否連續，為何要如此定義了。

PART 3：函數連續的定義(單點) (基礎)	
連續性 http://www.youtube.com/watch?v=kD2WbtDIriU	若函數 $y = f(x)$ 能夠滿足 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (1)$ 則稱 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 連續 (1)的左式為極限值，極限值須存在，也就是”左極限” 須等於”右極限” (1)的右式為函數值，須要有定義 綜合以上條件： $y = f(x)$ 在 $x = a$ 連續，$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ 三式相等，缺一不可
PART 4：判斷函數不連續的各種狀況 判斷下面函數在何處不連續，並說明其理由 (a) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$ ans: 因為 $f(1)$ 沒有定義，故 $f(x)$ 在 $x = 1$ 不連續 (b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$ ans: 因為極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ 不存在，故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 不連續 (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & \text{if } x \neq 1 \\ 2 & \text{if } x = 1 \end{cases}$ ans: 因為極限值 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 3) = 4$，函數值 $f(1) = 2$，兩者不相等，故 $f(x)$ 在 $x = 1$ 不連續 (d) $f(x) = [x]$，$[x]$ 表高斯函數 ans: 高斯函數在所有整數均不連續，例如在 $x = 2$，右極限 $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x] = 2$ 左極限 $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x] = 1$ 綜合以上結果，判斷函數是否連續的問題須注意的事項 (a) 分式函數要注意令分母為 0 之數是否有定義 (b) 函數分段定義時要注意極限值是否存在，並要等於函數值 (c) 高斯函數又稱階梯函數，是標準的不連續函數範例	
PART 5：函數連續的定義(區間)	
定義 (函數在開區間連續) 若函數 $y = f(x)$ 在開區間 (a, b) 中的每一點均連續，則稱 $y = f(x)$ 在開區間 (a, b) 連續 若函數 $y = f(x)$ 在閉區間 $[a, b]$ 連續，須滿足下列三條件 (1) $y = f(x)$ 在開區間 (a, b) 連續	

(2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ (點 a 滿足右連續)

(3) $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ (點 b 滿足左連續)

PART 6：連續函數的封閉性

若 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均在 $x = a$ 點連續， c 為常數，則

定理 1 (加減法) $f(x) \pm g(x)$ 也在 $x = a$ 點連續

定理 2 (乘法) $f(x)g(x)$ 在 $x = a$ 點連續

定理 3 (除法) $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x = a$ 點連續 ($g(a) \neq 0$)

定理 3 (數字乘法) $c f(x)$ 在 $x = a$ 點連續

PART 7：多項式函數的連續性

定理 設 $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ ($c_i, 0 \leq i \leq n$)，為 n 次多項式，則 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 中每一點均連續

PART 8：多項式分式函數的連續性

定理 設 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ， $P(x)$ 與 $Q(x)$ 為多項式，只要排除使 $Q(x) = 0$ 的點， $f(x)$ 均為連續函數。

PART 9：常見的連續函數

定理 下列各種函數在各自的定義域內均為連續函數

1. 多項式函數 $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ 定義域： $(-\infty, \infty)$

2. 分式函數 $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ，定義域： $\{x \in R \mid Q(x) \neq 0\}$

3. 根式函數 $f(x) = \sqrt{P(x)}$ ，定義域： $\{x \in R \mid P(x) \geq 0\}$

4. 三角函數

(a) $f(x) = \sin x$ ，定義域： $(-\infty, \infty)$

(b) $f(x) = \cos x$ ，定義域： $(-\infty, \infty)$

(b) $f(x) = \tan x$ ，定義域： $\left\{x \in R \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$

(b) $f(x) = \cot x$ ，定義域： $\{x \in R \mid x \neq k\pi, k \in Z\}$

(b) $f(x) = \sec x$, 定義域: $\left\{x \in R \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$ (b) $f(x) = \csc x$, 定義域: $\{x \in R \mid x \neq k\pi, k \in Z\}$ 5. 指數函數 $f(x) = a^x (a > 0, a \neq 1)$, 定義域: $(-\infty, \infty)$ 6. 對數函數 $f(x) = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$, 定義域: $(0, \infty)$	
PART 10: 合成函數之連續性(重要觀念)	
若 $f(x)$ 在 b 點連續, 且 $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$, 則 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(b)$, 以另一種表達方式 $\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$ 這說明了只要這個 f 函數能夠符合”連續”條件, 外面的 limit 符號可以穿透函數 f	
PART 11: 中間值定理與 Bozano 定理	
中間值定理 http://www.youtube.com/watch?v=flh7OEXVIO4&feature=youtu.be	設 $f(x)$ 為在閉區間 $[a, b]$ 之連續函數, 設 L 為介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間的實數, 則至少有一個數字 $c \in (a, b)$ 可使 $f(c) = L$ Bozano 定理又稱”勘根定理”, 若 $f(x)$ 為在閉區間 $[a, b]$ 之連續函數, $f(a)f(b) < 0$, 表示 $f(a)$ 與 $f(b)$ 一正一負, 則在 (a, b) 區間中至少存在一個根。
PART 12: 定點定理(Fixed Point Theorem)的定義	
若 $g(x): [a, b] \rightarrow [a, b]$ 為連續函數, 則 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 至少有一固定點。 什麼是固定點? 若函數 $g(x): [a, b] \rightarrow R$, 設 α 為 $[a, b]$ 上的一點, 若 $g(\alpha) = \alpha$, 我們就稱 α 為固定點 (fixed point)	
PART 13: 定點定理的證明 設 $f(x) = x - g(x)$, $f(x)$ 在 $[a, b]$ 必然是連續函數 現在依下列狀況證明 (a) 若 $f(a) = 0$, 則 $a - g(a) = 0$, a 就是固定點 (b) 若 $f(b) = 0$, 則 $b - g(b) = 0$, b 就是固定點 (c) 假設(a)與(b)都不成立, 在 $[a, b]$ 中 a 是最小的數字, b 是最大的數字, 那麼 $g(a) \neq a$, 當然大於 a , 也就是 $g(a) > a$, 同理, $g(b) < b$ 得到 $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ 依據”勘根定理”, 閉至少存在一個根 α , 使 $f(\alpha) = 0$, 也就是 $\alpha - g(\alpha) = 0$	