精熟學習

01.極限$\lim\limits_{x\to 1}\left(3x^3+2x^2+x+1\right)$值為

(A)4 (B)5 (C)6 (D)7

SOL: 當x趨近 1

$$\lim_{x\to 1}\left(3x^3+2x^2+x+1\right)=\lim_{x\to 1}\left(3x^3\right)+\lim_{x\to 1}\left(2x^2\right)+\lim_{x\to 1}\left(x\right)+\lim_{x\to 1}\left(1\right)$$

各自求出後相加

故選(D)

02.極限$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x|-x}{x}$值為(A) -2 (B) 0 (C) 2 (D) 不存在

SOL:

當x趨近 0 的左極限時，可假設$x=-\varepsilon$(ε表非常微小的數字)

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-x}{x}=\frac{\varepsilon-(-\varepsilon)}{-\varepsilon}=\frac{2\varepsilon}{-\varepsilon}=-2$$

或這樣想:當x趨近 0 的左極限時，$x<0$，$|x|=-x$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|-x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x-x}{x}=-2$$

故選(A)

03.極限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-x+5}{2x^2+8x+5}$值為(A) 4 (B) -1 (C) 2 (D) ∞

SOL:

無窮極限問題處理方法說明如下，分子分母各自除x^2

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-x+5}{2x^2+8x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{8x}{x^2}+\frac{5}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{8}{x}+\frac{5}{x^2}}$$

當$x\to\infty$時，後面分式部分均會趨近 0，僅留下各自領導係數

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}{2+\frac{8}{x}+\frac{5}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-0+0}{2+0+0}=\frac{4}{2}=2$$

故選(C)

04. 極限$\lim\limits_{x \to 5^+}[x]$值為(A) 4 (B) 5 (C) -5 (D) 不存在

SOL:

當$x \to 5^+$表示x由5的右方靠近5，故$5 < x < 6$，依據高斯函數的定義，可得

$\lim\limits_{x \to 5^+}[x] = 5$

故選(B)

5. 極限$\lim\limits_{x \to 0}\dfrac{|x|}{x}$值為(A) 1 (B) 0 (C) -1 (D) 不存在

SOL:

(1)考慮左極限$x \to 0^-$，在此情況下表示$x < 0$

$$\lim_{x \to 0^-}\frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-}\frac{-x}{x} = -1$$

(2)考慮右極限$x \to 0^+$，在此情況下表示$x > 0$

$$\lim_{x \to 0^+}\frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^+}\frac{x}{x} = 1$$

因為左極限不等於右極限，故極限不存在，故選(D)

6.求極限$\lim\limits_{x \to 5}(2x+3)$

SOL:當x趨近 5，$2x$則趨近 10，$2x+3$自然趨近 13，像如此的問題，我們可稱直接代入法問題。

$$\lim_{x \to 5}(2x+3) = 13$$

7. 求極限$\lim\limits_{x \to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}$

SOL:當x趨近3，分母趨近0，分子也趨近0，像如此的問題，表示分母與分子有共同因式，應先分解因式對消後，再直接代入法，這型問題稱對消法問題。

$$\lim_{x \to 3}\frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x+3) = 6$$

8. 求單邊極限$\lim\limits_{x \to 6^-}[x]$

SOL:當x趨近6的左極限，表示x由5的方向往6靠近，持續向6愈來愈靠近，但不會真正的到6，依據高斯函數的定義

$$\lim_{x \to 6^-}[x] = 5$$

9.討論極限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$

SOL:根據三角函數的定義，正弦函數滿足不等式$-1\le\sin x\le 1$

當$x>0$時，$-\dfrac{1}{x}\le\dfrac{\sin x}{x}\le\dfrac{1}{x}$ $\because\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$

由夾擠原理得知$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$

10.設函數$f(x)=\begin{cases}7\,,0<x\le 1\\8\,,1<x\le 2\\9\,,2<x\le 3\end{cases}$ 討論極限$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

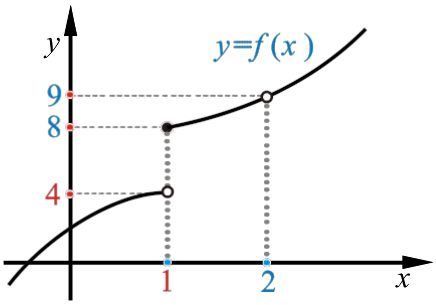
SOL:

(1)當x由左方趨近2，左極限$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=8$

(2)當x由右方趨近2，右極限$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=9$

左極限與右極限不相等，極限不存在

11. 設函數$y=f(x)$圖形如下



(1)試求$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ (2)試求$\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

SOL:

(1) 左極限$\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=4$，右極限$\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=8$，左極限與右極限不相等，極限不存在

(2) 左極限$\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=9$，右極限$\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=9$，左極限與右極限均為 9，故，既使$f$在$x=2$沒有定義，仍可得到$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=9$。