

第一週	主題一:數 主題二：函數 主題三：一元二次方程式 主題四：直線方程式
第二週	主題五：極限
第三週	主題六：連續性
第四週	主題七：漸近線
第五週	主題八：導函數
第六週	主題九：指數與對數
第七週	主題十：指數與對數的微分
第八週	主題十一：微分技巧延伸
第九週	主題十二：三角函數(一)
第十週	主題十三：三角函數(二)
第十一週	主題十四：三角函數的微分
第十二週	主題十五：相對極大與極小
第十三週	主題十六：絕對極值
第十四週	主題十七：近似值
第十五週	主題十八：相關變律
第十六週	主題十九：羅必達法則
第十七週	主題二十：不定積分
第十八週	主題二十一：不定積分的其他技巧

第二週 極限

主題五：極限

PART 1：極限觀念的導入 (基礎)

極限的觀念在微積分中佔有舉足輕重的地位，要進入微積分殿堂必須具備極限的觀念，以下面一個簡單的函數算式來說明就很容易讓同學了解：

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

當然， $f(x)$ 在 $x=1$ 時沒有定義，可是當 x 慢慢向 1 靠近時， $f(x)$ 的變化會是如何呢？以下表表示

表 1

x	0.9	0.99	0.999	$\rightarrow 1 \leftarrow$	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	1.8	1.98	1.998	$\rightarrow ? \leftarrow$	2.002	2.02	2.2

由表 1 可以看出當 x 向 1 靠近， $f(x)$ 會向 2 逼近，以下面符號表示

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

PART 2：極限的基本觀念(VIDEO)(05:58)

G01 極限

<http://www.youtube.com/watch?v=ObvaEoIiRQM>

影片內 PPT 文字：

介紹極限的符號、簡單的定義、函數的極限觀念，本部份是以直觀的角度來描述極限

PART 3：極限正式的定義

(進階)(VIDEO)(13:32)

G07 極限嚴格定義

<http://www.youtube.com/watch?v=-PT2X8lxNj8>

西元 1817，Bolzano 首先提出極限嚴格的定義，直到 Cauchy 使用 ε - δ 的方法定義極限沿用至今，其嚴格定義的內容概述如下：

若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ，當 x 趨近 a 時， $f(x)$ 趨近 L ，以數學式表示

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta \geq 0$ ，使得當 $0 < |x - a| < \delta$ 時，得到 $|f(x) - L| < \varepsilon$ 之結果

影片內 PPT 文字：看似簡單的極限，卻是難以證明，本部份學習極限的正式定義如何證明，也就是介紹 ε - δ 的觀念，以 ε - δ 的方法證明簡單的例題。

PART 4：極限的相關定理

(基礎)

設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 均在 $x = a$ 處之極限存在， k 為常數，則

$$1. \lim_{x \rightarrow a} k = k$$

2. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ 3. $\lim_{x \rightarrow a} k f(x) = k \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 4. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 5. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 6. $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \right)$	
PART 5：極限的求法(一) (VIDEO)(05:00)	
G02 極限的求法(一) http://www.youtube.com/watch?v=-G_zZaDWjBk	影片內 PPT 文字 當極限為簡單型時，可以將數字直接代入求極限值，這種問題各位同學可以試試看如何證明極限
PART 6：極限的求法(二) (VIDEO)(05:26)	
g03 極限的求法(二) http://www.youtube.com/watch?v=PIMCK0fNWL0	影片內 PPT 文字: 當極限為多項式分式函數，我們可以觀察分子分母 x 的最高次數， (1) $\deg(\text{分子}) < \deg(\text{分母})$ 則極限值=0 (2) $\deg(\text{分子}) > \deg(\text{分母})$ 則極限值= ∞ (3) $\deg(\text{分子}) = \deg(\text{分母})$ 則極限值=領導細數之比
PART 7：極限的求法(三) (VIDEO)(04:34)	
g04 極限的求法(三) http://www.youtube.com/watch?v=5o81nOZm3RA	影片內 PPT 文字 若出現 $\infty - \infty$ 的情況時，多以有理化分子方式將原式改寫為分式，再以無窮極限的技巧比較分子分母的冪，求極限值。
PART 8：夾擠原理(基礎) (VIDEO)(04:56)	
g05 夾擠原理 http://www.youtube.com/watch?v=1nZr78KxzCg&feature=youtu.be	假設 $f(x), g(x), h(x)$ 三個函數定義於含 $x = a$ 之開區間($x = a$ 不一定要有定義)，若滿足 $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ 且 $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$ ，則 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$
PART 9：單邊極限(基礎) (VIDEO)(06:41)	
g06 單邊極限 http://www.youtube.com/watch?v=xuC5ValKueM&feature=youtu.be	當 x 趨近 a 極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 時，我們應該要考慮兩個方向，由 a 的 右方向 a 靠近，記作 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 稱為右極限，反之，由 a 的左方

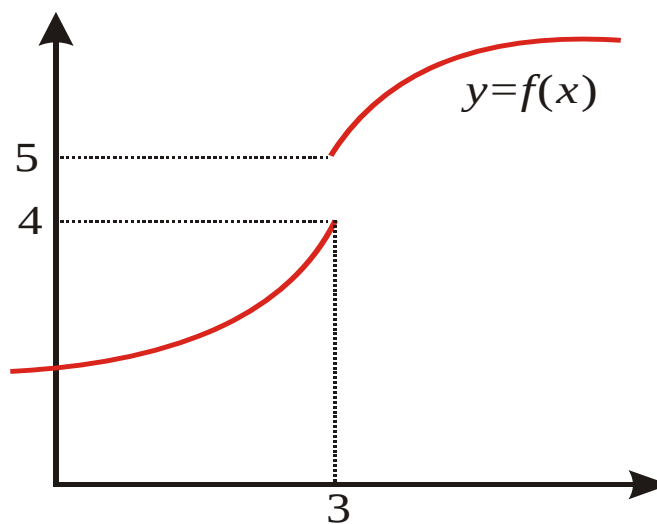
[.be](#)

向 a 靠近，記作 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 稱為左極限，此兩種狀況稱為單邊極限。

PART 10：極限的存在性(基礎)

若 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 時，我們稱 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在，也就是左極限=右極限

以下圖說明：



$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 4$ ， $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 5$ ，故 $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 不存在