

精熟學習

1.以下哪一個不為自然數

- (A)0 (B)1 (C)2 (D)100

SOL:自然數 $=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$ ，0 不屬於自然數，故選(A)

2.以下敘述何者不真？

- (A) 實數系具有完備性 (B) 有理數系具有完備性
(C) 有理數系具有稠密性 (D) 實數系包含無理數

SOL: (A)實數系具有完備性.....(正確) (B)

有理數系具有完備性.....(不正確) (C)

有理數系具有稠密性.....(正確) (D)實

數系包含無理數.....(正確) 故選(B)

3.區間 $A=[-3, 10]$ ，區間 $B=(1, 15]$ ，則

- (A) $[-3, 10]$ (B) $(1, 15]$ (C) $(1, 10]$ (D) $\emptyset$

SOL:實數區間的交集或聯集以數線繪圖可輕易求出



故選(C)

4.下列哪個數字是無理數？

- (A) $0.\bar{3}$ (B) $\sqrt{4+\sqrt{25}}$ (C) $\frac{3+\sqrt{2}}{6+2\sqrt{2}}$ (D) $2+\sqrt{3}$

SOL:

(A) $0.\bar{3}$ 可以寫成 $\frac{1}{3}$ ，故為有理數

(B) $\sqrt{4+\sqrt{25}} = \sqrt{4+5} = \sqrt{9} = 3$ 為整數，當然也是有理數

(C) $\frac{3+\sqrt{2}}{6+2\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{2(3+\sqrt{2})} = \frac{1}{2}$ ，是有理數

(D) $2+\sqrt{3}$ 無法以兩個互質整數之商表示，是無理數

故選(D)

6. 若 $f(x) = 2x + 1$ ，則 $f(2) = ?$

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

SOL: 函數對應之關係 $f(x) = 2x + 1$ ，當 $x = 2$ 時，對應到 $f(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5$

故選(C)

7. 若 $x < 0$ ，則對於 $|x|$ 的敘述何者不真

- (A) $|x| = -x$ (B) $|x| = \sqrt{x^2}$ (C) $|x|^2 = x^2$ (D) $|x| = \sqrt[3]{x^3}$

SOL: 絕對值函數 $|x|$ 表示無論 x 是正或負，一律為正

- (A) 當 $x < 0$ 時， $|x| = -x$ (正確)
(B) $\sqrt{x^2}$ 消去根號成為 $|x|$ (正確)
(C) 任何實數或絕對值的平方一律為正(正確)
(D) $\sqrt[3]{x^3}$ 消去根號不會改變正負(不正確)

故選(D)

8. 設一圓之半徑 r ，圓周長 S ，面積 A ，下列各敘述何者正確？

- (A) A 是 r 之函數 (B) A 是 S 之函數 (C) r 是 A 之函數 (D) 以上皆正確

SOL: 由以上之敘述可以得到下列關係

$$A = \pi r^2, S = 2\pi r, A = \pi \left(\frac{S}{2\pi} \right)^2 = \frac{S^2}{4\pi}, \text{ 故選(D)}$$

9. $[6.25] = ?$ 其中 $[]$ 為高斯函數

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

SOL: 高斯函數符號 $[x]$ 表示不大於 x 的最大整數，不大於 6.25 又最靠近的整數為 6，故選(B)

10. 設 $f(x) = x^2$ ， $g(x) = 2x + 1$ ，合成函數 $f(g(1)) =$

- (A) 1 (B) 6 (C) 9 (D) 12

SOL: 先求出 $g(1)$ 的值，再代入 $f(x)$ ，令 $g(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ ，

$$f(g(1)) = f(3) = 3^2 = 9, \text{ 故選(C)}$$

11. 試以實例說明有理數具有稠密性意義

SOL: 設 $a = \frac{q_1}{p_1}$ (p_1, q_1 互質), $b = \frac{q_2}{p_2}$ (p_2, q_2 互質), 無論 a 與 b 有多麼靠近, 在 a

與 b 之間必然至少存在一個有理數(例如:算術平均數)當然仍為有理數

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{q_1 p_2 + q_2 p_1}{2 p_1 p_2}, a \text{ 與 } c \text{ 將會更加靠近, 依此類推, 有理數將密密麻麻}$$

充滿在實數線上, 但不包含無理數(無法以整數之商表達的數字), 此說明了有理數之稠密性意義。

12. 試以實例說明有理數不具有完備性意義 SOL: 有理數雖然密密麻麻充滿在實數線上, 但仍然有許多“洞”無法填滿實數線, 這些“洞”就叫作無理數, 我們知道有理數+有理數=有理數, 這是非常顯而易見的, 但這是在有限的條件下成立, 但在無限的情況就不一定囉, 無窮級數

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{p^2}{6}$$

非常神奇吧!無限個有理數之和竟然成為無理數, 說明有理數雖然具有稠密性卻不具有完備性

13. 假設 $f(x) = x^2$, $g(x) = 3x + 1$, 試求合成函數 $f(g(x)) = ?$ $g(f(x)) = ?$

$$\text{SOL: } f(g(x)) = f(3x+1) = (3x+1)^2$$

$$g(f(x)) = g(x^2) = 3x^2 + 1$$

14. 高斯函數 $f(x) = [x]$ 表示不大於 x 的最大整數, 假設收費停車場停車一小時(含)內 20 元, 超過 1 小時則以 2 小時計算, 依此類推。某人停了 x 分鐘, 函數 $g(x)$ 表示應繳停車費, 則 $g(x) = ?$

SOL: 因為 x 分鐘 $= \frac{x}{60}$ 小時, 不足 1 小時將以 1 小時計, 故應收 $\left\lceil \frac{x}{60} \right\rceil + 1 \frac{1}{2}$ 小時,

$$\left\lceil \frac{x}{60} \right\rceil + 1 \frac{1}{2}$$

每小時 20 元, 應繳 $20 \left\lceil \frac{x}{60} \right\rceil + 10$, 故 $g(x) = 20 \left\lceil \frac{x}{60} \right\rceil + 10$

15. 試討論方程式一元二次方程式 $2x^2 + 6x + 7 = 0$ 實根的個數

SOL: 判別式 $\Delta = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 7 = 36 - 56 < 0$ 表示方程式沒有實根

16. 試將 $x^2 + 6x - 16$ 分解為二個一次因式的相乘

SOL: 以十字交乘法可輕易分解為 $(x + 8)(x - 2)$

17. 試將 $x^2 + 5x - 3$ 分解為二個一次因式的相乘

SOL: 無法以十字交乘法分解時，可以使用公式強迫分解

(1) 判別式 $\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 25 + 12 > 0$ ，表示有兩實根

(2) 兩實根為 $\frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}$

(3) 可強迫分解因式為 $\left(x - \frac{-5 - \sqrt{37}}{2}\right) \left(x - \frac{-5 + \sqrt{37}}{2}\right)$

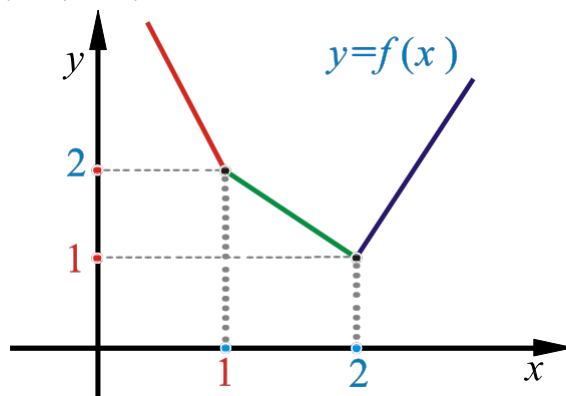
18. 使方程式 $|x-1| + 2|x-2| = k$ 恰有一組解的 k 值範圍

SOL: 遇到絕對值函數應分段討論以去掉絕對值，本題畫出 $|x-1| + 2|x-2| = k$ 之圖形，再畫出 $y = k$ 圖形，有一個交點

(1) $x \geq 2$ ， $y = |x-1| + 2|x-2| = (x-1) + 2(x-2) = 3x-5$

(2) $1 \leq x < 2$ ， $y = |x-1| + 2|x-2| = (x-1) + 2(2-x) = -x+3$

(3) $x < 1$ ， $y = |x-1| + 2|x-2| = (1-x) + 2(2-x) = -3x+5$



$y = k$ 是水平線，只有 $y = 1$ 才會與 $y = f(x)$ 有一個交點，故 $k = 1$