第一週	主題一:數 主題二：函數 主題三：一元二次方程式 主題四：直線方程式
第二週	主題五：極限
第三週	主題六：連續性
第四週	主題七：漸近線
第五週	主題八：導函數
第六週	主題九：指數與對數
第七週	主題十：指數與對數的微分
第八週	主題十一：微分技巧延伸
第九週	主題十二：三角函數(一)
第十週	主題十三：三角函數(二)
第十一週	主題十四：三角函數的微分
第十二週	主題十五：相對極大與極小
第十三週	主題十六：絕對極值
第十四週	主題十七：近似值
第十五週	主題十八：相關變律
第十六週	主題十九 ： 羅必達法則
第十七週	主題二十：不定積分
第十八週	主題二十一：不定積分的其他技巧

主題四：直線方程式

例題(直線方程式之斜率)

直線方程式 $L: ax+by+c=0$ 之斜率為?

SOL:將 L 之 x, y 截距列表

$\begin{array}{c|c|c} x & 0 & \frac{-c}{a} \\ \hline y & \frac{-c}{b} & 0 \end{array}$，過 $\left(0, -\dfrac{c}{b}\right)$，$\left(-\dfrac{c}{a}, 0\right)$，則斜率 $m=\dfrac{0-(-c/b)}{(-c/a)-0}=\dfrac{c/b}{-c/a}=-\dfrac{a}{b}$

例題(圖形的判斷)

直線方程式 $L: ax+by+c=0$，若 $ab<0$，$bc<0$，則直線 L 通過哪幾個象限?

SOL: $ax+by+c=0$ 之斜率為 $m=-\dfrac{a}{b}$，由於 $ab<0$，故斜率 $m>0$，直線圖形只有下列兩種狀況

直線方程式 $L: ax+by+c=0$，若 $ab<0$，$bc<0$，則直線 L 通過哪幾個象限?

SOL:

$ax+by+c=0$ 之斜率為 $m=-\dfrac{a}{b}$，由於 $ab<0$，故斜率 $m>0$，直線圖形只有下列兩種狀況

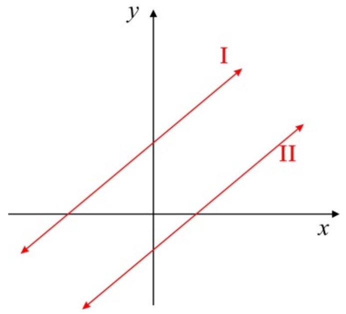

圖 01.斜率為正之直線方程式圖形

$ax+by+c=0$ 通過點 $(-\dfrac{c}{a},0)$，因為 $ab<0$，表示 x 截距為正，為 II 之狀況，因此直線通過第 I,III,IV 象限

PART 1 直線方程式的表達方法

直線方程式可以說在雙變數函數中最基礎，但也是最重要的，以微觀的角度來看，許多非線性問題常以線性的方法解決。

直線方程式的依照已知的條件分為 4 種表達方法

(1) 點斜式(2)點斜式 (3)斜截式(4)截距式分別說明如下

插入影片(直線方程式)

(1)點斜式

已知通過點 (x_0, y_0)，斜率為 m 之直線方程式為 $y-y_0=m(x-x_0)$

說明:假設 (x, y) 為直線上的點，根據斜率的定義 $m=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$，得到點斜式公式 $y-y_0=m(x-x_0)$

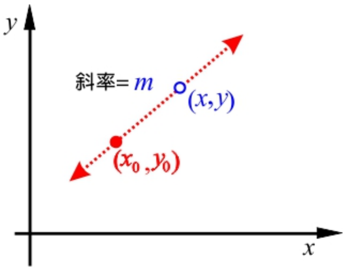

圖 02.點斜式形成直線

(2)兩點式

兩斜式:已知通過點(x_0,y_0)與(x_1,y_1)之直線方程式為 $y-y_0=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0)$

說明:

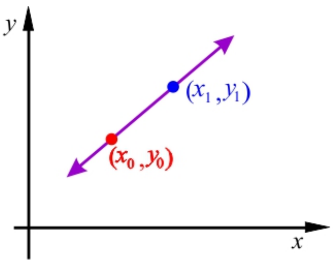

圖 03.兩點式形成直線

例題: (兩點式)

試求通過$(3,4),(-1,2)$兩點之直線方程式

SOL: (1)找出斜率 $m=\dfrac{4-2}{3-(-1)}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ (2)點斜式: $y-4=\dfrac{1}{2}(x-3)$

(3)斜截式:已知斜率為m ，y截距為b之直線方程式為$y=mx+b$

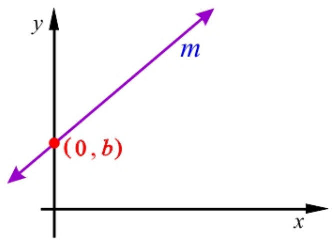

圖 04. y截距與斜率形成直線

(4)截距式:已知x截距為a ，y截距為b之直線方程式為$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$

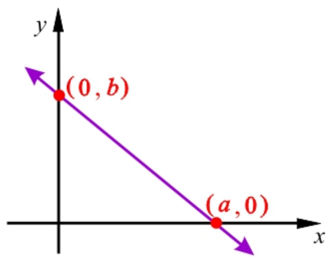

圖 05. x截距與y截距形成直線

例題: (圍出之面積)

試求直線$L:3x+5y+6=0$與兩軸圍出之三角形面積

SOL: (1)找出x截距 $\Rightarrow$ 令$y=0$ ，$x=-2$

(1)找出 y 截距 $\Rightarrow$ 令 $x=0$，$x=-\frac{6}{5}$ 圍出之三角形面積 $=\left\|-\frac{6}{5}\right\|\left\|-2\right\|=\frac{12}{5}$
在微分範疇中，常出現找尋切線方程式的問題；已知函數圖形上的一點座標，求切線方程式，第(1)種是最方便使用的，至於(2)(3)(4)種能夠熟練當然最好，若真的無法記住，我們都可以將條件轉換成點斜式，所以記得(1)點斜式就夠了。
例題(兩點式) 已知直線通過 $(1,3)$ 與 $(2,5)$，求直線方程式 SOL:原本是兩點式問題，我們先找出斜率 $m=\frac{5-3}{2-1}=2$，再找一點 $(1,3)$，直線方程式 $y-3=2(x-1)$
例題(斜截式) 已知直線斜率為 6，y 截距為 5，求直線方程式 SOL:原本是斜截式問題，我們知道 y 截距為 5 表示直線通過 $(0,5)$，利用點斜式，直線方程式 $y-5=6(x-0)$
例題:已知直線 x 截距為 3，y 截距為 5，求直線方程式 SOL:原本是截距式問題，x 截距為 3 表示過 $(3,0)$，y 截距為 5 表示過 $(0,5)$，有了兩點，斜率 $m=\frac{5-0}{0-3}=-\frac{5}{3}$，再找一點 $(3,0)$，直線方程式 $y-0=-\frac{5}{3}(x-3)$，整理 $-3y=5x-15$，同除 15 得到 $\frac{-3y}{15}=\frac{5x}{15}-1 \Rightarrow \frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ 與代截距式公式得到相同結果。
PART2 直線的平行與垂直
直線 L_1 之斜率為 m_1，直線 L_2 之斜率為 m_2， (1)若 $L_1 \parallel L_2$ 則 $m_1=m_2$ (2)若 $L_1 \perp L_2$ 則 $m_1 \cdot m_2=-1$
例題(斜率與垂直) 試利用斜率證明 $A(3,1),B(6,3),C(2,9)$ 兩點之直線方程式為直角三角形之三個頂點 SOL: $m_{AB}=\frac{3-1}{6-3}=\frac{2}{3}$，$m_{BC}=\frac{3-9}{6-2}=\frac{-6}{4}=-\frac{3}{2}$，$m_{CA}=\frac{1-9}{3-2}=\frac{-8}{1}=-8$，$m_{AB}\cdot m_{BC}=-1$ 可知 $AB \perp BC$
PART 3 點到直線的距離
公式:點 (x_0,y_0) 到直線 $L: ax+by+c=0$ 之距離 $d=\frac{\left\|ax_0+by_0+c\right\|}{\sqrt{a^2+b^2}}$
例題(平行線方程式與距離) 試求通過 $(3,7)$ 且平行直線 $L: 2x-3y=5$ 之直線方程式，並求兩平行線之距離 SOL: (1)設直線方程式 $L_1: 2x-3y=k$，因為通過 $(3,7)$，$2\cdot 3-3\cdot 7=k \Rightarrow k=-15$ 直線方程式為 $2x-3y=-15$ (2) $L_1: 2x-3y=k$ 上有一點 $(3,7)$，根據點到直線的距離公式

$$d = \frac{|2 \cdot 3 - 3 \cdot 7 - 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{|-20|}{\sqrt{13}} = \frac{20}{\sqrt{13}}$$