

第一週	主題一:數 主題二：函數 主題三：一元二次方程式 主題四：直線方程式
第二週	主題五：極限
第三週	主題六：連續性
第四週	主題七：漸近線
第五週	主題八：導函數
第六週	主題九：指數與對數
第七週	主題十：指數與對數的微分
第八週	主題十一：微分技巧延伸
第九週	主題十二：三角函數(一)
第十週	主題十三：三角函數(二)
第十一週	主題十四：三角函數的微分
第十二週	主題十五：相對極大與極小
第十三週	主題十六：絕對極值
第十四週	主題十七：近似值
第十五週	主題十八：相關變律
第十六週	主題十九：羅必達法則
第十七週	主題二十：不定積分
第十八週	主題二十一：不定積分的其他技巧

第一週 基礎數學

主題三：

一元二次方程式

PART 10：一元二次方程式

C01

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 是只含有一個未知數，並且未知數的最高次數是二次的多項式方程，這是一種很常見也很常用的方程式模型，若以函數的角度分析， $y = ax^2 + bx + c$ 是拋物線圖形

若以拋物線開口形狀來看，有 2 種狀況(由 a 控制)

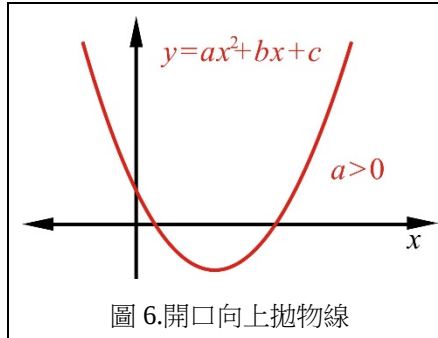


圖 6. 開口向上拋物線

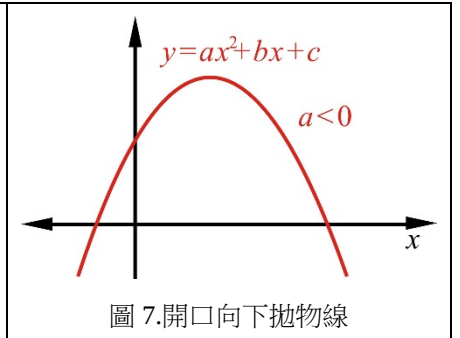


圖 7. 開口向下拋物線

若以與 x 軸交會的狀況來說(由 $b^2 - 4ac$ 控制)

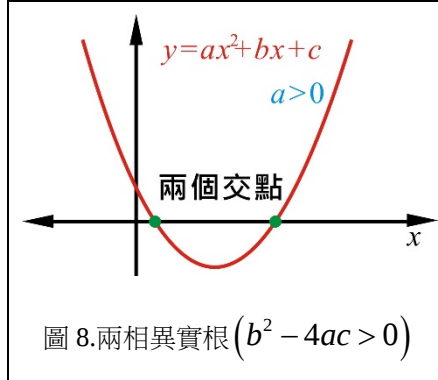


圖 8. 兩相異實根 ($b^2 - 4ac > 0$)

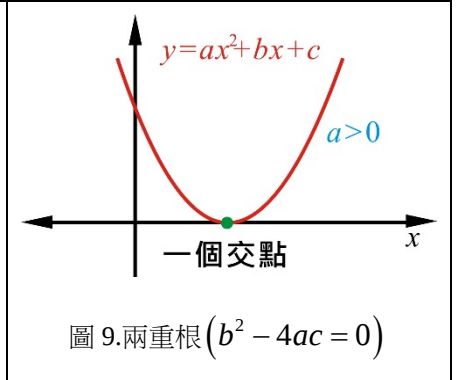


圖 9. 兩重根 ($b^2 - 4ac = 0$)

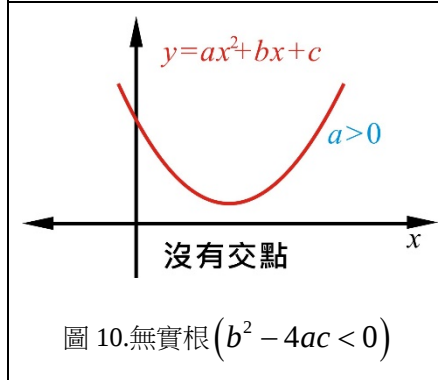


圖 10. 無實根 ($b^2 - 4ac < 0$)

PART 11：十字交乘法

C02

用來解一元二次方程式的一種方法，對於根都為整數的方程式，通常會比公式解算起來快。

原理：乘開 $(x + a)(x + b)$ 後為 $x^2 + (a + b)x + a \cdot b$ ，也就是說如果找到兩個數字，相乘為常數項，相加為 x 項係數則可快速分解

例題：(十字交乘)

$x^2 + 7x + 10$ 如何分解為兩個一次式乘積

SOL: 找到 2 與 5，相乘為 10 (後面)，相加為 7 (中間)

$$x^2 + 7x + 10$$

$$\begin{array}{cc} x & 2 \\ x & 5 \end{array}$$

圖 11.十字交乘

於是可以得到 $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$

PART 12：公式解

C03

用來解一元二次方程式的另一種方法，任何一元二次方程式只要套上公式都能求解。

$ax^2 + bx + c = 0$ 可以強迫分解為

$$\left(x - \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right) \left(x - \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

方程式根的狀況受 $b^2 - 4ac$ 影響

(1) $b^2 - 4ac > 0$ 有兩相異實根

(1) $b^2 - 4ac = 0$ 有重根

(1) $b^2 - 4ac < 0$ 無實根

例題: (公式解)

$x^2 - 3x + 1$ 如何分解為兩個一次式乘積

SOL: 難以以十字交乘法

本題 $a = 1$ ， $b = -3$ ， $c = 1$ ， $b^2 - 4ac = 5$

$$x^2 - 3x + 1 = \left(x - \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right) \left(x - \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)$$